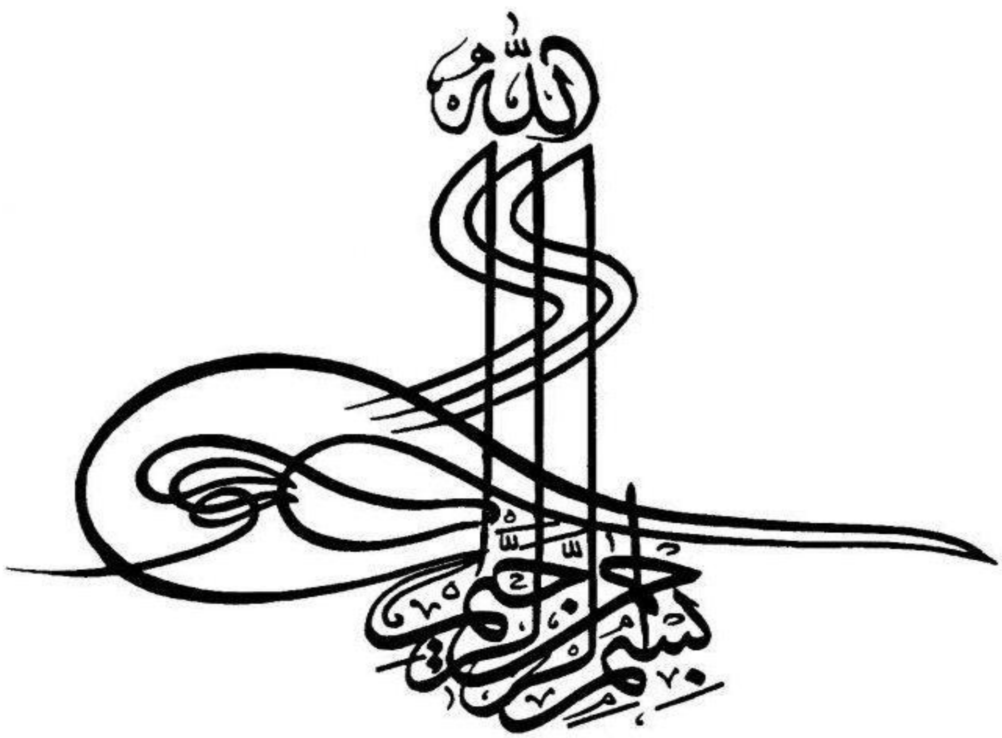


شمارش، بدون شمردن

(فصل ششم ریاضی کلاس دهم)

📖طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی

📖پاسخ کاملا تشریحی

📖تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل ششم کتاب درسی ریاضی پایه دهم ، مبحث « ترکیبیات» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این جزوه با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این جزوه و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

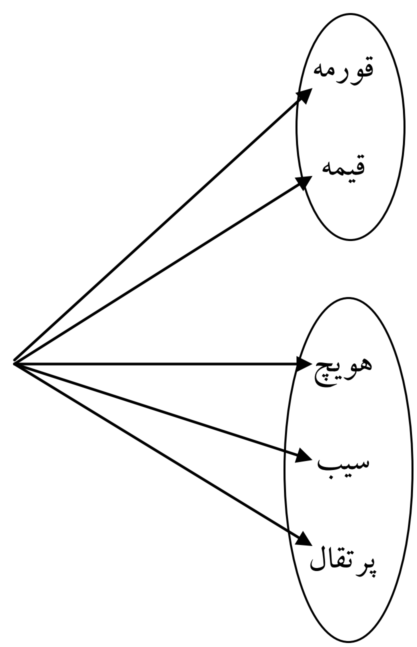
حبیب هاشمی

فهرست مطالب

۱-۶اصل جمع و اصل ضرب

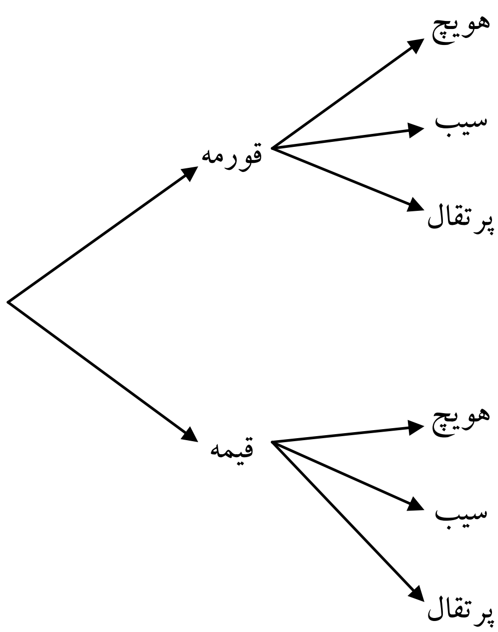
مثال: کیان قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش کمیل، شیرینی بدهد. او با خود فکر می کند که کمیل را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلو خورشت قورمه سبزی و قیمه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه هویج، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای کمیل وجود دارد؟

طبق نمودار زیر ۵ انتخاب وجود دارد.



مثال: هفته بعد کمیل قصد دارد به خاطر تولدش کیان را دعوت کند. اما او می خواهد کیان را هم به آن رستوران « و»هم به آن آب میوه فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب میوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. کیان چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

با توجه به نمودار زیر ۶ انتخاب خواهد داشت.



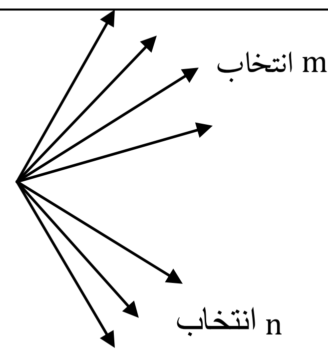
پرسش: چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول کیان فقط به یکی از دو روش کار را انجام می دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می کند و یا آنکه به آب میوه فروشی رفته و یکی از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سؤال دوم کمیل هر دو مکان را خواهد رفت که در اولی ۲ انتخاب و در دومی ۳ انتخاب دارد.

پرسش: در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه ای بین تعداد گزینه های فهرست های انتخابی رستوران و آب میوه فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سؤال اول ۵=۳+۲ حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب می کرد، ولی در سوال دوم ۶=۳×۲ حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول، ۳ انتخاب در مکان دوم وجود دارد.

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام دارد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه ها انجام شود. مثلاً در مثال ۱، کیان فقط یکی از کارهای « دعوت به رستوران **یا** دعوت به آب میوه فروشی » را انجام می دهد»

نکته: اگر انجام کار C منوط به انجام کار A « **یا** » کار B باشد آن گاه کار C را به $(m+n)$ طریق می توان انجام داد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب،...و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \cdots m_k$ روش وجود دارد.

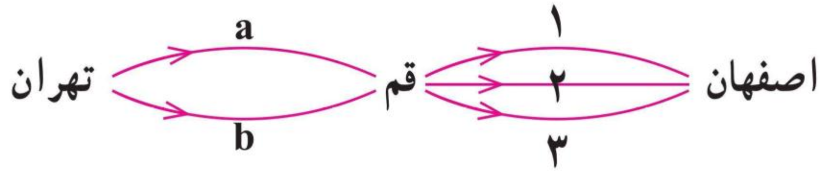
اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

« توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می گیرد **و** هم دعوت با آب میوه فروشی که مرحله دوم است، صورت می پذیرد».

نکته: اگر انجام کار C منوط به انجام کار A « **و** » کار B باشد آن گاه کار C را به $(m \times n)$ طریق می توان انجام داد.

مثال :فردی می خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر b و a و از قم به اصفهان سه مسیر ۱و ۲و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان صفر کند؟

a,۱	a,۲	a,۳
b,۱	b,۲	b,۳



مثال: پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا « یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می کند. گل هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از : مریم، گلایل، زنبق و رز. شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

۷=۳+۴ بنابراین ۷ انتخاب دارد

مثال:هفته بعد پژمان می خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می خواهد « یک شاخه گل» و « یک نوع شیرینیی» بخرد و همان گزینه ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

۱۲=۳×۴ بنابراین ۱۲ انتخاب دارد

{(مریم و گردویی) و (مریم و نارگیلی) و (مریم و کشمشی) و (گلایل و گردویی) و (گلایل و نارگیلی) و (گلایل و کشمشی) و (زنبق و گردویی) و (زنبق و نارگیلی) و (زنبق و کشمشی) و (رز و گردویی) و (رز و نارگیلی) و (رز و کشمشی)}

پرسش: در هر یک ازدو مثال قبل از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در مثال اول پژمان می تواند یکی از دو روش را انتخاب کند که یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد، لذا طبق اصل جمع ۷=۳+۴ انتخاب دارد ولی درمثال دوم پژمان می خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی که طبق اصل ضرب ۱۲=۳×۴ انتخاب دارد.

مثال: کتابخانه ی مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ی ادبیات دارد. اگر یک دانش آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند به چند راه می تواند این کار را انجام دهد؟ ۹۰=۵۰+۴۰ بنابراین ۹۰راه وجود دارد

مثال: از بین ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می توان غذایی به همراه سالاد سفارش داد؟ ۲۰=۵× ۴ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول $m_۱$ روش، برای انجام مرحله دوم $m_۲$ روش،...و برای انجام مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش های آن مرحله ممکن باشد)، کار مورد نظر با $m_۱ \times m_۲ \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

مثال: می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن ها، یکی از حروف {ا،ب،ج،د} و در سمت چپ آن ها، عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود. چند کارت متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\\vdots\\۹}}\ \underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\\vdots\\۹}}\ \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{ا\\ب\\ج\\د}} = ۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴$$

مثال: یک ساختمان با ۸ طبقه و ۵ رنگ مختلف داریم؛ به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۵ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد؛ به طوری که هیچ دو طبقه ی مجاوری هم رنگ نباشند.

۱) $۵^{۸}$ ۲) ۵×۴^{۷} √ ۳) $۵\times۴\times۳^{۶}$ ۴) ۵×۳^{۷}

جواب:

$$\overbrace{\boxed{5}}^{\text{طبقه اول}} \times \overbrace{\boxed{4}}^{\text{طبقه دوم}} \times \overbrace{\boxed{4}}^{\text{طبقه سوم}} \times \dots \times \overbrace{\boxed{4}}^{\text{طبقه هشتم}} = 5 \times 4^7$$

طبقه اول	طبقه دوم	طبقه سوم
(سبز)	(آبی)	سبز
آبی	قرمز	قرمز
قرمز	زرد	زرد
زرد	نارنجی	نارنجی
نارنجی		

مثال : یک اتوبوس دارای ۸ مسافر است و در ۵ ایستگاه متوقف می‌شود. مسافرین این اتوبوس به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

۱) ۴۰ ۲) 8^5 ۳) 5^8 ✓ ۴) $\frac{8!}{5!}$

جواب:

$$\overbrace{\boxed{5}}^{\text{مسافر اول}} \times \overbrace{\boxed{5}}^{\text{مسافر دوم}} \times \dots \times \overbrace{\boxed{5}}^{\text{مسافر هشتم}} = \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{\text{۸ تا}} = 5^8$$

مسافر اول	مسافر دوم	مسافر هشتم
ایستگاه اول	ایستگاه اول	ایستگاه اول
⋮	⋮	⋮
ایستگاه پنجم	ایستگاه پنجم	ایستگاه پنجم

مثال : در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سؤال متفاوت، اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه ی سؤال‌ها پاسخ دهند، چند پاسخنامه‌ی متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟

جواب:

$$\overbrace{\boxed{4}}^{\text{سوال اول}} \times \overbrace{\boxed{4}}^{\text{سوال دوم}} \times \dots \overbrace{\boxed{4}}^{\text{سوال دهم}} = 4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$$

سوال اول	سوال دوم	سوال دهم
گزینه ۱	گزینه ۱	گزینه ۱
گزینه۲	گزینه۲	گزینه۲
گزینه ۳	گزینه ۳	گزینه ۳
گزینه۴	گزینه۴	گزینه۴

مثال: یک آزمون چند گزینه ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال ها جواب دهد؟

$$\underbrace{\overbrace{۴ \times ۴ \times \ldots \times ۴}^{۱۰\ \text{بار}}}_{\text{سوالات چهار گزینه ای}} \quad \underbrace{\overbrace{۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}^{۵\ \text{بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = ۲^{۲۵}$$

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\underbrace{\overbrace{۵ \times ۵ \times \ldots \times ۵}^{۱۰\ \text{بار}}}_{\text{سوالات چهار گزینه ای}} \quad \underbrace{\overbrace{۳ \times ۳ \times \ldots \times ۳}^{۵\ \text{بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = ۵^{۱۰} \times ۳^{۵}$$

مثال: تعداد ۲ نفر برای ریاست ادارهای نامزد شدهاند؛ به چند طریق ۱۵ نفر از کارمندان میتوانند به آن ها رأی دهند، به طوری که هر فرد حداکثر به یک نفر رأی داده باشد؟

۱) $۲^{۱۵}$ ۲) $۱۵^{۲}$ ۳) $۳^{۱۵}$ ✓ ۴) $۱۵^{۳}$

جواب:

$$\overset{\text{نفر اول}}{\boxed{۳}} \times \overset{\text{نفر دوم}}{\boxed{۳}} \times \ldots \overset{\text{نفر پانزدهم}}{\boxed{۳}} = \underbrace{۳ \times ۳ \times \ldots \times ۳}_{\text{تا}۱۵} = ۳^{۱۵}$$

نفر اول	نفر دوم	نفر پانزدهم
کاندید A	کاندید A	کاندید A
کاندید B	کاندید B	کاندید B
هیچکدام	هیچکدام	هیچکدام

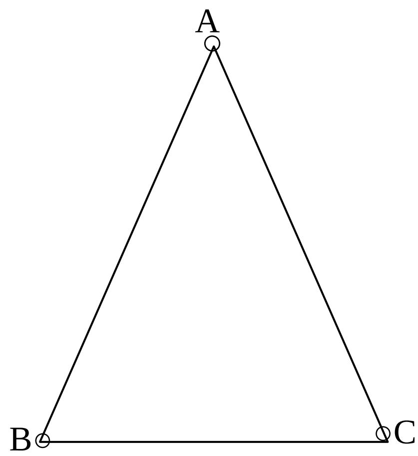
تمرین: سؤال قبل را در حالتی حل کنید،که هر فرد تنها به یک نفر رأی داده باشد.

جواب: $۲^{۱۵}$

مثال: در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداکثر : ۵ × ۱۰ × ۱۲ × ۳۰ =۱۸۰۰۰ حداقل : ۵ × ۸ × ۱۰ × ۲۰ = ۸۰۰۰

مثال: می خواهیم راس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم .



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برای آنکه راس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبی و دو راس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برای متفاوت بودن رئوس B وc نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل جمع ۶= ۲ + ۲+ ۲ طریق این کار امکان پذیر است.

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که راس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند. با توجه به اینکه هر راس به دو راس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی توان این کار را انجام داد.

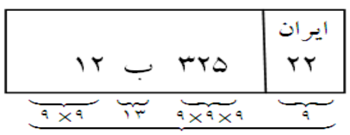
پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

حالت الف: با توجه به این که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب ها برابر است با : ۶ = ۱ × ۲ × ۳

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی ۶ می باشد زیرا با وجود سه راس و ۳ رنگ متمایز، خود به خود رئوس هم رنگ نخواهند بود.

مثال: با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟)

$A = \{۱۱,۲۲,...,۹۹\}$
$B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$
c = {ب, ج, د, س, ص , ط, ق, ل , م, ن, و, ه, ی}



$$۱۳ \times ۹^۶ = ۶۹۰۸۷۳۳$$

مثال: در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیراتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$$\underset{مدل}{۵} \times \underset{رنگ}{۱۰} \times \underset{حجم موتور}{۳} \times \underset{دنده}{۲} = ۳۰۰$$

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

$$\underset{مدل}{۵} \times \underset{رنگ}{۱} \times \underset{حجم موتور}{۳} \times \underset{دنده}{۲} = ۳۰$$

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

$۵ \times ۱ \times ۳ \times ۱ = ۱۵$

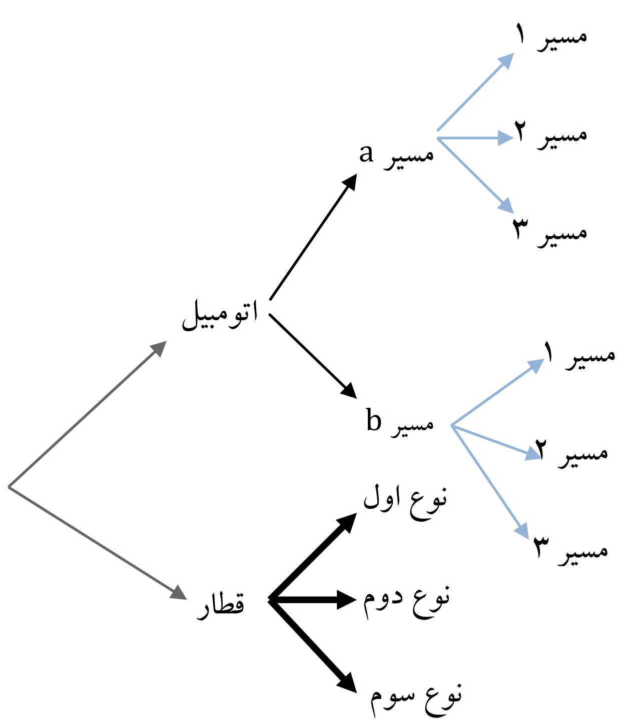
مدل رنگ حجم موتور دنده

مثال: ۵نفر به سینما می روند و در یک ردیف ۷ صندلی خالی پیدا می کنند. به چند طریق می توانند روی این ۷ صندلی بنشینند.

حل)نفر اول روی هر کدام از صندلی ها می تواند بنشیند (۷ صندلی). نفر دوم روی ۶ صندلی (۶ طریق) و به همین ترتیب نفر پنجم روی سه صندلی باقی مانده می تواند بنشیند. لذا جواب ۲۵۲۰= ۳× ۴× ۵× ۶× ۷ است.

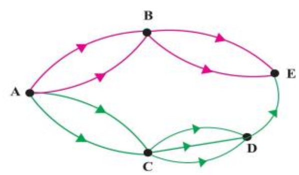
دقت کنیم :در برخی مسائل لازم است از هر دو نوع اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال:فردی می خواهد از تهران به اصفهان برود او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. مسیرها و انتخاب های او در شکل زیر مشخص شده است .در کل چند انتخاب دارد؟



حل: اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.

مثال: اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهری A و B و C و D و E باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟

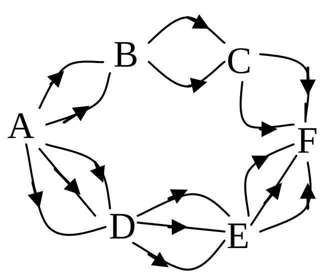


ABE مسیر: ۲×۲=۴

$ACDE$ مسیر: ۲×۳×۱=۶

$\xrightarrow{+}$ ۱۰

مثال: اگر شکل مقابل نشان دهنده ی جاده های بین شهرهای F,E,D,C,B,A باشد و همه ی جاده ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟ ۳۵= ۳ ×۳ ×۳+ ۲×۲×۲



مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل:

حالت اول: اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد: ۲۶۶۲۴=۳۲×۲۶×۳۲

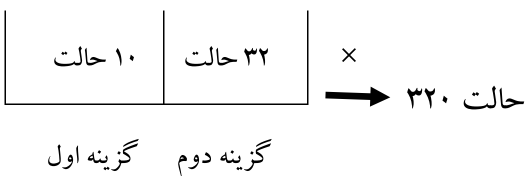
حالت دوم: اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد: ۲۱۶۳۲=۲۶×۳۲×۲۶

تعداد حالات ممکن: ۴۸۲۵۶=۲۱۶۳۲+۲۶۶۲۴

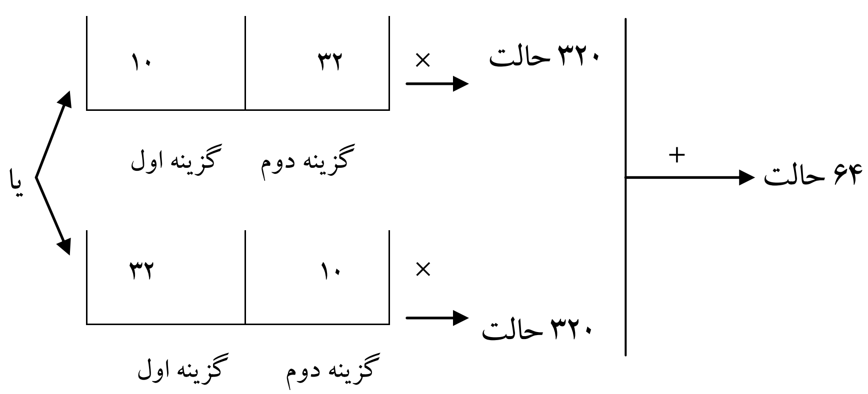
۱) تعداد حالت های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت های زیر به دست آورید. مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است. رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و... و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود بنابراین ۴۲= ۳۲ + ۱۰ حالت داریم.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.



پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

۱۰۰ = ۱۰ × ۱۰ : هر دو عدد باشند

یا

۶۷۶ = ۲۶ × ۲۶ : هر دو حرف باشند

$\xrightarrow{+}$ ۷۷۶

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

۱۰	۹	۲۶	۲۵
اعداد		حروف	

$\xrightarrow{\times}$ ۵۸۵۰۰ حالت

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود و تکرار مجاز نباشد حتما بایستی از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات کنیم که محدودیت در آنجاست.

تذکر: اگر تکرار مجاز باشد چه محدویت داشته باشیم چه محدودیت نداشته باشیم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

مثال: با حروف کلمه‌ی «جمهوری» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که حرف اول آن ها نقطه‌دار نباشد؟

شروع ←

$\boxed{۴} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴} = ۴ \times ۵ \times ۴ = ۸۰$

(و)	(ه)	(م)
ر	و	ه
ج	ر	و
ی	ج	ر
	ی	

دقت کنیم چون تکرار مجاز نیست و خانه ی سمت راست دارای محدودیت است بایستی از خانه ی سمت راست شروع به شمارش حالات کنیم.

۲-۶پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی ؛ سه رقمی و ... ؛ زوج ؛ فرد ؛ مضرب ۵ و...

برای پیدا کردن تعداد اعداد، مطمئن ترین روش اصل ضرب می باشد.

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود و تکرار مجاز نباشد حتما بایستی از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات کنیم که محدودیت در آنجاست.

تذکر: اگر تکرار مجاز باشد چه محدویت داشته باشیم چه محدودیت نداشته باشیم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

چند محدودیت مهم:

۱) اگر صفر در بین ارقام داده شده باشد، نمی‌توان صفر را در سمت چپ عدد قرار داد.

۲) اگر در بین اعداد داده شده صفر وجود داشته باشد، **به ناچار** باید از اصل ضرب استفاده کنیم.(نمی توان از جایگشت وترکیب استفاده کرد.)

۳)عددی مضرب ۲ (بخش‌پذیر بر ۲) است، که رقم سمت راست آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

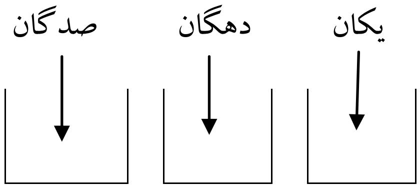
۴) عددی مضرب ۳ است، که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

۵) عددی مضرب ۵ (بخش‌پذیر بر ۵) است، که رقم سمت راست آن ۰ یا ۵ باشد.

۶)عددی مضرب ۶ است، که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳

نکته: قبل از انجام هر کاری مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام را مشخص می کنیم؛ سپس سوال را حل می کنیم.

مثال الف) با سه رقم ۵و۳و ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۴ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پر کردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به دست آوردن جواب، تعداد راه های پر کردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

چون تکرار مجاز است از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

هر جایگاه را به سه حالت می توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

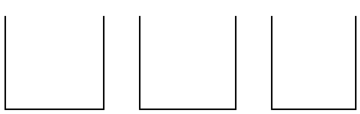
۵یا۳یا۲ ۵یا ۳یا۲ ۵یا۳یا۲

تعداد حالت ها ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷

ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

چون محدودیتی نداریم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

۱- برای پر کردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟



۳ حالت ← تعداد حالت ها

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته ایم. برای پر کردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ها ⟵ ۲ حالت

۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

لذا ۶= ۱ × ۲ × ۳ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

یک عدد قرار گرفته است   یک عدد قرار گرفته است

تعداد حالت ⟵ ۱

ب) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

چون تکرار مجاز است از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

در این جایگاه فقط عدد ۲ می تواند قرار بگیرد، لذا ۱ حالت وجود دارد.

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟ در جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد می توانند قرار گیرند، پس هر کدام دارای سه حالت است.

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ۹ = ۱ × ۳ × ۳

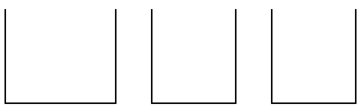
ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

چون تکرار مجاز نیست و محدودیت داریم(زوج بودن) بایستی از خانه ای شروع به شمارش کنیم که محدودیت درآنجاست یعنی بایستی از یکان شروع به شمارش حالات کنیم.

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

در جایگاه سمت راست فقط عدد۲ می تواند باشد پس ۱ حالت داریم

۱ حالت



۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟

در جایگاه سمت چپ فقط یکی از اعداد ۳ یا ۵ می تواند باشند پس ۲ حالت داریم

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟

با قرار گرفتن یکی از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ، فقط یک عدد برای جایگاه وسط باقی می ماند، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم.

۴-لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با ۲ = ۱ × ۱ × ۲

مثال: با اعداد ۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت بطوری که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد(ارقام تکراری مجاز باشد).

ب) تکرار ارقام جایز نباشد(ارقام تکراری مجاز نباشد).

ج) عدد زوج و تکرار ارقام جایز باشد.

د) عدد زوج و تکرار ارقام جایز نباشد.

حل:برای حل مسائلی از این قبیل، برای هر رقم یک مکان به صورت مربع در نظر می گیریم و تعداد انتخاب ها و یا تعداد طرقی که می توان در این مربع عدد قرار داد را در زیر آن می نویسیم. در این مثال چون می خواهیم عدد سه رقمی تشکیل دهیم لذا سه مربع در نظر می گیریم که به ترتیب از چپ به راست بیانگر مکان های صدگان، ده گان و یکان عدد سه رقمی است.

الف) ابتدا سه مربع بیانگر مکان های یکان، ده گان و صدگان در نظر می گیریم. چون تکرار ارقام جایز بوده و هیچ گونه محدودیتی روی مکان های یکان و صدگان نداریم (مثلاًدر اعداد داده شده صفر نداریم) لذا تفاوتی نمی کند که شمارش را از چپ(رقم صدگان) و یا از راست (رقم یکان) شروع کنیم. مثلاً فرض کنید شمارش را از چپ (رقم صدگان) شروع کنیم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است(کار A). واضح است که این کار را به ۵ طریق می توان انجام داد چون در این مکان می توان اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ را قرار داد. حال سراغ رقم ده گان می آییم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است (کار B). واضح است که این کار را نیز به ۵ طریق می توان انجام داد. حال سراغ رقم یکان می آییم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است(کار C) . واضح است که این کار را نیز به ۵ طریق می توان انجام داد. اما در نهایت کاری که می خواهیم انجام دهیم تشکیل یک عدد سه رقمی است و انجام این کار منوط به انجام کار A و کارB و کارC است لذا این کار را به ۱۲۵=۵×۵×۵ طریق می توان انجام داد. یا تعداد ۱۲۵ عدد سه رقمی با ارقام تکراری می توان تشکیل داد.

۵ ۵ ۵ ⟶ ۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵

ب) در این حالت نیز تفاوتی نمی کند که از سمت چپ (رقم صدگان) و یا سمت راست (رقم یکان) شروع کرد. مثالاً فرض کنید از سمت چپ شروع کنیم. واضح است که کار اول (قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در مکان صدگان) را به ۵ طریق می توان انجام داد. اما چون تکرار ارقام جایز نیست، لذا عددی که در این مکان قرار می گیرد در مکان های ده گان و یکان نمی تواند قرار گیرد و بنابراین کار دوم (مکان ده گان) را به ۴ طریق و کار سوم (مکان یکان) را به ۳ طریق می توان انجام داد. لذا تعداد ۶۰= ۳× ۴ × ۵ عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان تشکیل داد.

۵ ۴ ۳ ⟶ ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

ج) چون تکرار ارقام جایز است لذا تفاوتی نمی کند که از چپ (رقم صدگان) و یا از راست (رقم یکان) شروع کرد. منتها باید توجه داشت که چون قرار است عدد زوج باشد لذا در مکان یکان فقط می توان اعداد ۲ یا ۴ را قرار داده و لذا این کار را به دو طریق می توان انجام داد.

۵ ۵ ۲ ⟶ ۵ × ۵ × ۲ = ۵۰

د) چون تکرار ارقام جایز نیست و باید عدد زوج باشد لذا حتماً باید از سمت راست (رقم یکان) شروع کرد. در مکان یکان یا باید ۲ و یا ۴ قرار گیرد(۲ انتخاب) و در مکان ده گان هر کدام از آن ۵ عدد به جز عددی که در مکان یکان قرار گرفته (۴ انتخاب) و در مکان صدگان هر کدام از آن ۵ عدد به جز اعدادی که در مکان های یکان و ده گان قرار گرفته اند (۳ انتخاب).

۳ ۴ ۲ ⟶ ۳ × ۴ × ۲ = ۲۴

توجه

توجه کنید که در حل مسائلی از این قبیل، تا جایی که تکرار ارقام مجاز باشد تفاوتی نمی کند که شمارش را از چپ شروع کرد و یا از راست. اما اگر تکرار ارقام جایز نباشد در این صورت اگر بر روی مکان یکان محدودیت وجود داشته باشد (مانند زوج بودن یا فرد بودن) حتماً باید از سمت راست (مکان یکان) شروع کرد و اگر بر روی مکان صدگان محدودیت وجود داشته باشد (مانند وجود صفر در داده ها) باید از سمت چپ (مکان صدگان) شروع کرد و به طور کلی هنگامی که تکرار ارقام جایز نیست، بر روی هر مکانی که محدودیت وجود داشته باشد باید از همان طرف شروع کرد.

مثال :با اعداد ۰،۱،۲،۳،۴و۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد.

ب) تکرار ارقام جایز نباشد.

ج) عدد زوج و تکرار ارقام جایز باشد.

حل:

در این حالت چون در بین اعداد صفر داریم و صفر یک محدودیت روی مکان صدگان ایجاد می کند(عدد سه رقمی که رقم صدگان آن صفر باشد، عدد دو رقمی است) لذا در حالاتی که تکرار ارقام جایز نباشد حتماً باید از سمت چپ (از سمت رقم صدگان) شروع کرد. اما اگر تکرار ارقام جایز باشد تفاوتی نمی کند که از کدام طرف شروع کنیم. فلش های قرار داده شده بیانگر آن است که از کدام طرف باید شروع کرد. اگر هم از چپ و هم از راست فلش قرار داده شده باشد بیانگر آن است که تفاوتی نمی کند که از چپ شروع شود و یا از راست.

الف)

۵ ۶ ۶ ⟶ ۵ × ۶ × ۶ = ۱۸۰

ب) در این حالت اولاً از سمت چپ شروع می کنیم و ثانیاً در مکان صدگان نمی تواند ۰ قرار گیرد لذا در این مکان ۵ انتخاب داریم.

۵ ۵ ۴ ⟶ ۵ × ۵ × ۴ = ۱۰۰

ج)

۵ ۶ ۳ ⟶ ۵ × ۶ × ۳ = ۹۰

مثال :با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

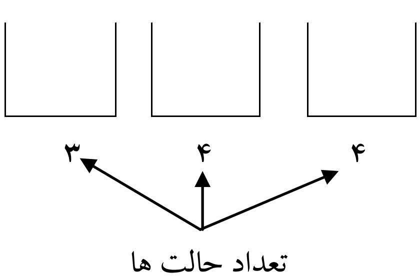
الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

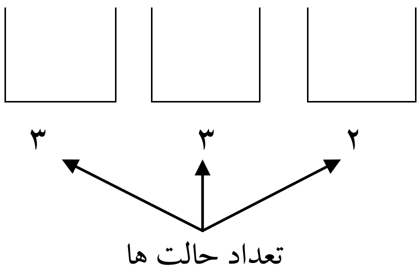
حل:

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد، بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.

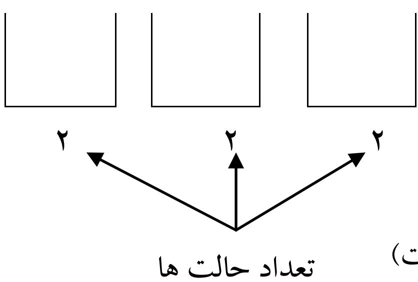


لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت. ۳×۴×۴=۴۸

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می توان نوشت. ۳× ۳ × ۲ = ۱۸



پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۲× ۲ × ۲ = ۸



مثال : با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجازاست)

جواب: (اگر تکرار ارقام مجاز باشد، از هرجا شروع به شمارش حالات کنیم ایراد ندارد.)

$$\begin{array}{ccccccc} \overrightarrow{\boxed{۳}} & \times & \boxed{۴} & \times & \overleftarrow{\boxed{۴}} & = & ۴۸ \\ ۱ & & ۰ & & ۰ & & \\ ۲ & & ۱ & & ۱ & & \\ ۳ & & ۲ & & ۲ & & \\ & & ۳ & & ۳ & & \end{array}$$

مثال: چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۰، ۱ وجود دارد؟ (سراسری تجربی)

جواب:

$$\underset{\substack{۱}}{\overrightarrow{\boxed{۱}}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\boxed{۲}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\boxed{۲}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\boxed{۲}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\boxed{۲}}\times\underset{\substack{۰\\۱}}{\overleftarrow{\boxed{۲}}}=۲^{۵}=۳۲$$

مثال: چند عدد چهار رقمی بدون رقم ۷ داریم؟

جواب:

$$\underbrace{\overrightarrow{\boxed{۸}}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}}\times\underbrace{\overleftarrow{\boxed{۹}}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}}=۵۸۳۲$$

مثال: چه تعداد عدد چهار رقمی زوج وجود دارد؟

جواب:

$$\underbrace{\overrightarrow{\boxed{۹}}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\overleftarrow{\boxed{۵}}}_{\substack{۰\\۲\\۴\\۶\\۸}}=۴۵۰۰$$

مثال: چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؛ به طوری که رقم دهگان آن عددی اول باشد؟

حل: تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟(تکرار ارقام مجاز است)

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۵\\۷}}\times\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۰\\۱\\۵\\۷}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۰\\۵}}=۲۴$$

مثال: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگتراز ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:۴۹۹ = ۱ − ۵۰۰ = ۵ × ۵ × ۵ × ۴ (عدد ۲۰۰۰هم در بین این ۵۰۰ عدد قرار دارد که باید حذف شود.)

$$\underset{\substack{2\\3\\4\\7}}{\underbrace{\boxed{4}}} \times \underset{\substack{0\\2\\3\\4\\7}}{\underbrace{\boxed{5}}} \times \underset{\substack{0\\2\\3\\4\\7}}{\underbrace{\boxed{5}}} \times \underset{\substack{0\\2\\3\\4\\7}}{\underbrace{\boxed{5}}} = 500$$

نکته: کد با عدد متفاوت است. رقم سمت چپ و حتی رقم‌های بعدی آن (کد) می‌تواند صفر باشد؛ در حالی که این ویژگی در مورد اعداد صدق نمی کند.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند کد سه رقمی می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underset{\substack{0\\1\\2\\3\\4}}{\underbrace{\boxed{5}}} \times \underset{\substack{0\\1\\2\\3\\4}}{\underbrace{\boxed{5}}} \times \underset{\substack{0\\1\\2\\3\\4}}{\underbrace{\boxed{5}}} = 125$$

مثال: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underset{\substack{(2)\\3\\4\\5}}{\underbrace{\boxed{4}}} \times \underset{\substack{(3)\\4\\5\\0}}{\underbrace{\boxed{4}}} \times \underset{\substack{4\\5\\0}}{\underbrace{\boxed{3}}} = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

مثال: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی و بزرگتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\overset{\text{شروع}}{\underset{\substack{(5)\\7\\9}}{\underbrace{\boxed{3}}}} \times \underset{\substack{(7)\\9\\1\\3}}{\underbrace{\boxed{4}}} \times \underset{\substack{(9)\\3\\1}}{\underbrace{\boxed{3}}} \times \underset{\substack{1\\3}}{\underbrace{\boxed{2}}} = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$$

مثال: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کمتر از ۷۰۰۰ می توان نوشت؟

جواب:

$$\underset{\substack{(3)\\5}}{\underbrace{\boxed{2}}} \times \underset{\substack{(5)\\7\\9\\1}}{\underbrace{\boxed{4}}} \times \underset{\substack{(7)\\9\\1}}{\underbrace{\boxed{3}}} \times \underset{\substack{9\\1}}{\underbrace{\boxed{2}}} = 48$$

مثال: با استفاده از اعداد مجموعه {۱،۲،۵،۸،۹} به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته‌ایم، در چند حالت این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

$$\overrightarrow{\boxed{۱}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲}\boxed{۱}} = ۲۴$$

مثال: اگر با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، در چند حالت این عدد زوج است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ √ ۴) ۱۹۲

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \times \overset{\overleftarrow{\text{شروع}}}{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۴\\ ۶}}}$$

مثال: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و زوج، بزرگتر از ۴۰۰۰ وجود دارد؟ (ارقام زوج‌اند نه خود عدد)

جواب:

$$\overset{\overrightarrow{\text{شروع}}}{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۴)\\ ۶\\ ۸}}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۶\\ ۸\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۶)\\ ۸\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۸\\ ۰}} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

نکته: وقتی در طرح مسئله ای ارقام زوج مطرح می شود ، یعنی برای تمام خانه ها از اعداد زوج استفاده می کنیم. اما وقتی عدد زوج ذکر شود، فقط رقم یکان آن باید زوج باشد، و مابقی ارقام هم می توانند زوج باشند و هم فرد.

مثال: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ √ ۴) ۱۰۸

جواب: گزینه ۳

برای نوشتن عدد چهار رقمی بزرگ تر از ۳۰۰۰ و با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام، از اصل ضرب کمک می گیریم. کافی است تک تک خانه های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان را شمارش حالت کرده و در هم ضرب کنیم. دقت کنید شروع شمارش حالت ها از خانه ای انجام می شود که محدودیت رقم گذاری در آنجاست. پس شمارش حالت ها را از هزارگان انجام می دهیم. داریم:

$$\overrightarrow{۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲} = ۹۶$$

مثال: با ارقام {۰،۱،۲،۵،۸} چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم یکان و صدگان یکسان باشند؟

جواب: $\overrightarrow{\boxed{۴}} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} \times \boxed{۱} = ۱۰۰$

برای رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم(صفر در سمت چپ عدد قرار نمی‌گیرد). برای رقم دهگان ۵ انتخاب داریم؛ چون قرار است رقم صدگان و یکان مثل هم باشند، آن ها را یکی در نظر می‌گیریم و ۵ انتخاب دارند. یا این که می‌گوییم رقم صدگان ۵ انتخاب دارد، چون می خواهیم رقم صدگان و یکان یکسان باشند، برای رقم یکان تنها یک انتخاب داریم(باید همان رقم قرار گرفته در صدگان را قرار دهیم).

مثال: تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که در آن ها رقم یکان و صدگان با هم برابر است چندتا می باشد؟

اگر این عدد سه رقمی را به صورت | یکان | دهگان | صدگان | در نظر بگیریم برای رقم صدگان ۹ حالت داریم با معلوم بودن رقم صدگان، از انجا که باید رقم یکان با رقم صدگان برابر باشد، برای رقم یکان، یک حالت امکان پذیر است اما برای رقم دهگان ده حالت امکان پذیر است پس طبق اصل ضرب ۹۰ = ۱× ۱۰ × ۹

مثال : تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که در آن ها :

الف) رقم ۲ ظاهر نشده است چندتاست؟

جواب:

۸	×	۹	×	۹
۱		۰		۰
۳		۱		۱
۴		۳		۳
۵		۴		۴
۶		۵		۵
۷		۶		۶
۸		۷		۷
۹		۸		۸
		۹		۹

ب) لااقل یک بار رقم ۲ ظاهر شده است چندتاست؟

اعداد طبیعی سه رقمی که رقم ۲ در آن نباشد -کل اعداد سه رقمی طبیعی =جواب

$$\underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}\times\underbrace{\boxed{10}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}\times\underbrace{\boxed{10}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}\;-\;\underbrace{\boxed{8}}_{\substack{1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}\times\underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}\times\underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}}$$

مثال : با اعداد ۱،۲،۳،۴و۵ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر چهار می توان تشکیل داد به طوری که در هر عدد رقمی تکرار نگردد.

حل)اعدادی بر چهار بخش پذیر هستند که دو رقم ده گان و یکان آن ها بر چهار بخش پذیر باشد لذا دو رقم آخر این عدد باید ۱۲ یا ۲۴ یا ۳۲ یا ۵۲ باشد. تعداد اعدادی که دو رقم آخر آن ها ۱۲ است برابر است با ۶.

$$\underset{3}{\square}\;\underset{2}{\square}\;\underset{1}{\square}\;\underset{1}{\square} \longrightarrow 3\times 2\times 1\times 1 = 6$$

به طور مشابه تعداد اعدادی که دو رقم آخر آن ها ۲۴ یا ۳۲ و یا ۵۲ است نیز ۶ می باشد لذا ۲۴ = ۶ × ۴ است.

نکته: هرگاه در طرح مسئله سه شرط زیر لحاظ شده باشد:

شرط۱: در بین ارقام داده شده، صفر وجود داشته باشد.

شرط۲: تعداد اعداد زوج (مضرب ۲) یا مضرب ۵ (بخشپذیر بر ۵) را از ما بخواهد.

شرط۳: تکرار ارقام مجاز نباشد.

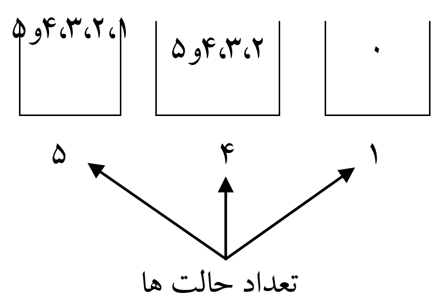
آن را در دو حالت زیر بررسی می کنیم.

حالت ۱: فقط رقم صفر در یکان باشد.　　حالت ۲: رقم صفر در یکان نباشد.

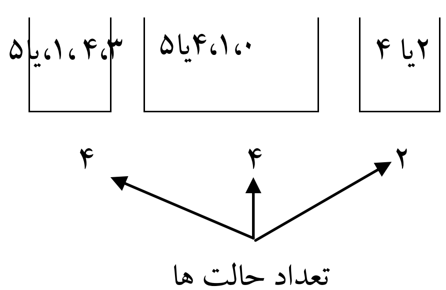
مثال :با اعداد ۰،۱،۲،۳،۴و۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که عدد زوج و تکرار ارقام جایز نباشد.**حل)** در این حالت هم بر روی مکان یکان محدودیت داریم(عدد باید زوج باشد) و هم بر روی مکان صدگان محدودیت داریم (عدد صفر نباید در این مکان قرار گیرد). در چنین مواردی طبق نکته بالامسئله را به دو قسمت تقسیم می کنیم به طوری که در هر قسمت تنها یک محدودیت وجود داشته باشد و سپس تعداد شمارش های این دو قسمت را با هم جمع می کنیم.

حالت ۱) رقم یکان آن ها صفر باشد.

برای مکان یکان فقط یک انتخاب داریم (عدد صفر). حال برای دو مکان باقی مانده تفاوتی نمی کند که از چپ شروع کنیم یا از راست. حالت های جایگاه ها به صورت مقابل است. ۲۰ = ۱ × ۴ × ۵



حالت دوم: اگر رقم یکان ۲یا ۴ باشد؛ یعنی رقم سمت راست دو حالت می تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۳۲ = ۲ × ۴ ×۴

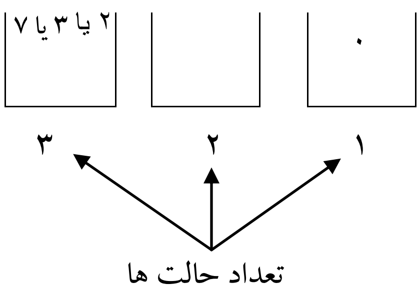


پس تعداد ۵۲ =۳۲+ ۲۰ عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان تشکیل داد.

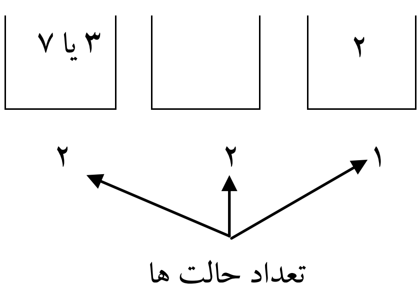
مثال :با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰ چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

حل) چون عدد مورد نظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت های جایگاه ها به صورت مقابل است. ۶ = ۱ × ۲ × ۳



حالت دوم: اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۴ = ۱ × ۲ × ۲



لذا در کل ۱۰ حالت می توان نوشت.

مثال: با استفاده از ارقام ۰، ۲، ۴، ۷، ۳ عددی سه رقمی به تصادف می سازیم. در چند حالت عدد ساخته شده زوج است؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$\boxed{٤} \times \boxed{٣} \;\vdots\; \boxed{١} = ١٢$

حالت دوم : رقم یکان صفر نباشد:

$\boxed{٣} \; \boxed{٣} \;\vdots\; \boxed{٢} = ١٨$

کل حالات : ۱۲ + ۱۸ = ۳۰

مثال : با اعداد ۰،۱،۳،۵،۶،۷و۸ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان تشکیل داد به طوری که در هر عدد رقمی تکرار نگردد.

حل) عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\;\vdots\;\boxed{۰}$

۶ ۵ ۴ ¦ ۱ ⟵ ۶ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۲۰

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\;\vdots\;\boxed{۵}$

۵ ۵ ۴ ¦ ۱ ⟵ ۵ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۰۰

جواب ۲۲۰ = ۱۰۰ + ۱۲۰

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که هیچکدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشند؟

جواب:۱۵۶ = ۹۶ + ۶۰

حالت۱:

$\underbrace{\boxed{۵}}_{(۱)\ ۲\ ۳\ ٤\ ۷} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{(۲)\ ۳\ ٤\ ۷} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{۳\ ۴\ ۷} \times \;\vdots\; \underbrace{\boxed{۱}}_{(۰)}$

حالت ۲:

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(4)\\1\\3\\7}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(1)\\3\\7\\0}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{3\\7\\0}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(2)\\4}} = 96$$

مثال: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)

حالت ۱:

$$\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(2)\\3\\5}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(3)\\5}} \times \underbrace{\boxed{1}}_{5} \times \underbrace{\boxed{1}}_{0} = 6$$

حالت ۲:

$$\underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(2)\\3}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(0)\\3}} \times \underbrace{\boxed{1}}_{3} \times \underbrace{\boxed{1}}_{5} = 4$$

جواب: $10 = 4 + 6$

مثال: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید در چند حالت این عدد زوج است؟

جواب:

$$\left\{\underbrace{\boxed{4}\boxed{3}\boxed{1}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{3}\boxed{3}\boxed{2}}_{\text{۲ یا ۴}}\right\} = 30$$

تمرین: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم درچند حالت یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب ۱۰

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟

جواب: ۱۰

تمرین: چهار رقم ۹، ۷، ۰، ۵ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۵ حاصل می‌شود؟

جواب: ۱۰

ب) مضرب ۱۵ حاصل می‌شود؟

جواب: ۱۰

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد، تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بـود، به سراغ مضرب۵ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

۳-۶فاکتوریل

فاکتوریل: برای عدد صحیح و مثبت n ، n فاکتوریل که آن را به صورت n! نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$n! = n(n-۱)(n-۲)\ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$

مثال:

$$
\begin{aligned}
۵! &= ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \\
۴! &= ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \\
۳! &= ۳ \times ۲ \times ۱ \\
۲! &= ۲ \times ۱ \\
۱! &= ۱
\end{aligned}
$$

قرار داد ۱=!۰

$$۶! = ۶ \times \underbrace{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۵!} = ۶ \times ۵!$$

$$۶! = ۶ \times ۵ \times \underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۴!} = ۶ \times ۵ \times ۴!$$

$۷! = ۷ \times ۶!$ $\qquad$ $۷! = ۷ \times ۶ \times ۵!$

$$۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!$$

$$۱۰! = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!$$

$$(n-۱)! = (n-۱)(n-۲)(n-۳) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

$$n! = n\underbrace{(n-۱)(n-۲)\ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{(n-۱)!} = n(n-۱)!$$

$$n! = n(n-۱)(n-۲)!$$

$$n! = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!$$

$$(n+۱)! = (n+۱)(n)(n-۱)(n-۲)\ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

$$(n+۱)! = (n+۱)n!$$

$$(n+٥)! = (n+٥)(n+٤)!$$

$$(n-٤)! = (n-٤)(n-٥)!$$

$$(n-٥)! = (n-٥)\big(n-۶\big)(n-۷)!$$

مثال :عبارات زیر را ساده کنید:

$$\frac{٦!}{٣!} = \frac{٦\times٥\times٤\times\cancel{٣!}}{\cancel{٣!}} = ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$$

$$\frac{١٢!}{١٠!} = \frac{١٢\times١١\times\cancel{١٠!}}{\cancel{١٠!}} = ١٢ \times ١٨ = ١٣٢$$

$$\frac{٥!}{٢!\times٣!} = \frac{٥\times٤\times\cancel{٣!}}{٢\times١\times\cancel{٣!}} = ١٠$$

$$\frac{٧!}{٢!\times٥!} = \frac{٧\times٦\times\cancel{٥!}}{٢\times١\times\cancel{٥!}} = ٢١$$

$$\frac{(n+٢)!}{n!} = \frac{(n+٢)(n+١)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+٢)(n+١)!$$

$$\frac{(n-٤)!}{(n-٥)!} = \frac{(n-٤)\cancel{(n-٥)!}}{\cancel{(n-٥)!}} = n-٤$$

$$\frac{(n-٢)!}{(n-١)!} = \frac{\cancel{(n-٢)!}}{(n-١)\cancel{(n-٢)!}} = \frac{١}{n-١}$$

دقت کنیم عبارت بزرگتر را تجزیه می کنیم تا جایی که عبارت کوچکتر ظاهر شود در اینجا !(n-۱) بزرگتر است

پس آن را تجزیه می کنیم.

مثال: مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $۶! = ۶ \times \overbrace{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}^{۵!} = ۶ \times ۵!$

ب) $۸! = ۸ \times ۷!$

پ) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

ت) $n! = n \times (n-۱)!$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{۵!}{۴!} = \frac{۵ \times \overbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}^{۴!}}{\underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۴!}} = ۵$

ب) $\frac{۱۰!}{۹!} = \frac{۱۰ \times ۹!}{۹!} = ۱۰$

پ) $\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$

ت) $\frac{۸!}{۶!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۶!} = ۵۶$

ث) $\frac{۱۰!}{۸!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۸!} = ۹۰$

ج) $\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$

چ) $\frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۳۳۶$

ح) $\frac{۱۰!}{۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$

خ) $\frac{n!}{(n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!} = n(n-۱)(n-۲)$

د) $\frac{n!}{(n-۴)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$

ذ) $\frac{n!}{(n-۵)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-۱)(n-۲)\ldots(n-k+۱)$

مثال : حاصل ضرب های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۹ \times ۸ = \frac{۹!}{۷!}$

ب) $۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = \frac{۹!}{۵!}$

پ) $۱۱ \times ۱۰ \times ۹ = \frac{۱۱!}{۸!}$

ت) $۸ = \frac{۸!}{۷!}$

ث) $n(n-۱) = \frac{n!}{(n-۲)!}$

ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n!}{(n-۴)!}$

مثال: کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

درست $۶! = ۶ \times ۵!$ 　　 نادرست $۶! = ۳! + ۳!$

نادرست $۲ \times ۳! = ۶!$ 　　 نادرست $۸! = ۴! \times ۲!$

نادرست $۴! = \frac{۸!}{۲!}$ 　　 نادرست $(۳!)^{۲} = ۹!$

٤ـ٦ جایگشت

جایگشت : نحوه قرار گرفتن اشیا در کنار هم را جایگشت می نامیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های nشی از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{n!}{\text{حاصلضرب جایگشت‌های تکراری}}$$

دقت کنید در سوالاتی از جایگشت که نیاز به کل حالات داریم، از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال: با حروف کلمه ی $STATISTICS$ چند کلمه ی ۱۰ حرفی می توان نوشت؟

حل: تعداد n=۱۰ حرف داریم که $n_1 = ۳$ حرف شبیه به هم (حرف S) ، $n_2 = ۳$ حرف شبیه هم (حرف T)، $n_3 = ۲$ حرف شبیه هم (حرف I) است لذا

$$\frac{۱۰!}{۳! \times ۳! \times ۲!} = ۵۰٤۰۰$$

مثال: با حروف کلمه‌ی آبدانان چند کلمه‌ی ۷حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{\underbrace{۲!}_{\text{۲ تا ن داریم.}} \times \underbrace{۳!}_{\text{۳ تا آ داریم.}}}$

مثال۳۷: با حروف کلمه‌ی ATAXIA چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۶!}{۳!}$

تمرین۵: با حروف کلمه‌ی شمشیر چند کلمه‌ی۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۵!}{۲!} = ۶۰$

مثال۳۸: با حروف کلمه‌ی شاهزاده چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{۲! \times ۲!} = ۱۲۶۰$

مثال۳۹: با حروف کلمه‌ی $APADANA$ چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

$\checkmark$۱) ۲۱۰   ۲) ۳۰   ۳) ۴۰   ۴) ۱۰

جواب: $\frac{۷!}{۴!} = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = ۲۱۰$

مثال: با حروف کلمه‌ی ستایش چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: تکراری نداریم که بر تکرار تقسیم کنیم پس برابر است با !۵

مثال: به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در یک صف پشت سرهم قرار داد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴√) ۷۲۰

جواب: ۷۲۰=!۶

مثال: ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

جواب: !۱۰

مثال: با ارقام شماره تلفن «۲۲۵۷۵۵» چند شماره تلفن ۶ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

جواب: $\frac{۶!}{۲!\times۳!}$

مثال : تعداد روش های چیدن پنج حرف یونانی αوβوγوδوθ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می شوند)

کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت های پنج شی ء متمایز چندتاست؟ ۱×۲×۳×۴×۵= !۵

مثال :تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»،«ش»، «و»، «ا»،

«ن»،«پ»و«ه» می توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف) ۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷= !۷

مثال : با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت؟

۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷×۸×۹= !۹

مثال : تعداد جایگشت های ۱۰ شی ء متمایز چندتاست؟ ۱×۲×...×۹×۱۰=!۱۰

مثال : ۵نفر وارد یک اتاق می شوند. اگر یک نفر از آن ها بنشیند، بقیه به چند طریق می توانند در کنار او و در یک ردیف بنشینند.

حل) توجه کنید که تعیین نکرده اند که سایرین در سمت چپ و یا سمت راست و یا .... بنشینند. لذا چهار نفر باقی مانده می توانند همگی در سمت چپ او بنشینند (!۴) یا سه نفر در سمت چپ و یک نفر در سمت راست او بنشیند(!۴) یا دو نفر در سمت چپ و دو نفر در سمت راست (!۴) یا یک نفر در سمت چپ و سه نفر در سمت راست (!۴) و یا همگی در سمت راست بنشینند (!۴) لذا جواب ۱۲۰ = !۵= !۴ ×۵= !۴+!۴+!۴ +!۴ +!۴

یعنی نشستن یک نفر از آن ها هیچ تفاوتی نکرده و جواب همچنان !۵ است. البته این نتیجه علی رغم این که ممکن است غیر منتظره باشد اما با کمی دقت ملاحظه می شود که کاملاً درست است. چون مکان شخصی که نشسته است ثابت نبوده و دائماً تغییر می کند. یک بار نفر اول صف است، یک بار نفر دوم صف و به همین ترتیب تا نفر آخر صف.

مخصوص صددرصدی ها

***مثال:** با ارقام ۲، ۰، ۰، ۳ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۸ √ ۴) ۱۰

جواب: $\frac{۲\times۴\times۳\times۲\times۱}{۳!}$

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\ ۰\\ ۰\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۰)\\ ۰\\ ۲}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۲}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۲}$$

نکته: اگر در بین اعداد صفر داشته باشیم، ابتدا فرض می‌کنیم رقم‌های داده شده متمایز هستند وبا استفاده از اصل ضرب جواب را به‌دست می‌آوریم و در آخر جواب به‌دست آمده را بر جایگشت تکرارها تقسیم می‌کنیم.

***مثال:** با ارقام ۲، ۲، ۲، ۰، ۰، ۱، ۴، ۳ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۱) !۸ ۲) $\frac{۸!}{۲!\times۳!}$ ۳) $\frac{۷!}{۲!}$ √ ۴) $\frac{۷!}{۲!\times۳!}$

جواب: $\frac{۷!}{۲!} = \frac{۶\times۷!}{۲!\times۳!}$

$$\underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(2)\\2\\2\\1\\4\\3}}\times\underbrace{\boxed{7}}_{\substack{(2)\\2\\1\\4\\3\\0}}\times\underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(2)\\1\\4\\3\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(1)\\4\\3\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(4)\\3\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(3)\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(0)\\0}}\times\underbrace{\boxed{1}}_{0}$$

مثال: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $\frac{8!}{2!\times 4!}$ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ √

جواب: ۲۰ $= \frac{4\times 6!\times 4}{4!\times 4!}$

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(3)\\3\\3\\3}}\times\underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(3)\\3\\3\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(3)\\3\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(3)\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(0)\\0\\0}}\times\underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(0)\\0}}\times\underbrace{\boxed{1}}_{0}\times\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(0)\\0\\0}}$$

۵-۶جایگشت های خاص(کنارهم بودن چند شیء، یک در میان قرار گرفتن اشیاءو...)

۱-۵-۶ قرار گرفتن چند شیءِ درکنار هم

نکته: اگر در جایگشت چند شیء قرار شد تعدادی از اشیاء کنار هم باشند، آن ها را با طناب به هم بسته و یک شی در نظر می گیریم.

تذکر: اگر در جا دادن این اشیاء ترتیبی ذکر نشود، جایگشت خود این اشیاء را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می کنیم.

مثال: ۵ دانشجوی رشته ریاضی و ۳ دانشجوی رشته آمار به چند طریق می توانند در یک ردیف بنشینند هرگاه:

الف) رشته دانشجو مهم نباشد.

ب) دانشجویان ریاضی کنار هم باشند.

ج) دانشجویان هم رشته کنار هم باشند

حل

الف) چون رشته مهم نیست لذا تعداد صف های ۸ تایی این ۸ نفر برابر است با ۴۰۳۲۰ = !۸

ب) چون قرار است دانشجویان ریاضی کنار هم باشند، لذا ۵ دانشجوی ریاضی را یک نفر فرض می کنیم در نتیجه این ۸ نفر به ۴ نفر تبدیل شده که به تعداد !۴ می توانند در یک ردیف قرار گیرند از طرفی ۵ نفر دانشجوی ریاضی نیز به !۵ می توانند در کنار هم قرار گیرند(کنار هم جایشان را عوض کنند) لذا جواب ۲۸۸۰ = !۵ × !۴ است.

ج) مشابه بند (ب) دانشجویان ریاضی را یک نفر و دانشجویان آمار را یک نفر فرض می کنیم در نتیجه این ۸ نفر یه ۲ نفر تبدیل شده که به تعداد !۲ می توانند در یک ردیف قرار گیرند. از طرفی دانشجویان ریاضی به !۵ و دانشجویان آمار به !۳ می توانند در کنار هم قرار گیرند لذا جواب ۱۴۴۰ = !۳ × !۵ × !۲ است.

مثال: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق ممکن می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد، به طوری که:

الف) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند. (سراسری تجربی و ریاضی)

جواب: کتاب‌های ریاضی را به هم می‌بندیم و یک کتاب در نظر می‌گیریم!۳ × !۵

کتاب های ادبی　　کتاب های ریاضی

۲۲۲۲　　$\boxed{۲۲۲}$

ب)کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند.

جواب: !۴ × !۴

پ) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم و کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند؟

جواب: !۴ × !۳ × !۲

مثال: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد ۵ رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۱۱۲　　۲) ۲۴　　√ ۳) ۳۶　　۴) ۴۸

جواب: !۳ × !۳

$\boxed{۱,۳,۵}$, ۲, ۴

مثال: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره در آن عدد ۱۲۵ به کار رفته باشد، تعداد ۵ رقمی-های حاصل کدام است؟

جواب: ۶= !۳

$\boxed{۱۲۵}, ۳, ۴$

مثال: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف c, m, o به صورت com قرار گرفته باشند چندتاست؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۷۲۰ √ ۳) ۴۸۰ ۴) ۳۶۰

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$\boxed{\text{com}}, p, u, t, e, r$

مثال: با حروف کلمه‌ی مهتاب چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که «الف» بلافاصله بعد «ت» بیاید؟

۱) ۱۲ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰ جواب: ۲۴ = !۴

$\boxed{\text{تا}}$ م ه ب

مثال: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum

الف)عبارت op وجود دارد؟

جواب: $\frac{۶!}{۲!}$

$\boxed{op}, i, s, s, u, m$

ب)عبارت os وجود دارد.

جواب: !۶

پ) o و s کنارهم هستند.

جواب: $۲! \times ۶!$

مثال: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum عبارت op وجود ندارد؟

جواب: جایگشت های کنارهم <u>قرار نگرفتن</u> چند شیء کنارهم، برابر است با کل جایگشت‌ها، منهای جایگشت‌های کنارهم قرار گرفتن چند شیء.

$$\frac{۷!}{۲!} - \frac{۶!}{۲!}$$

مثال: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت حروف یکسان، کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ √ ۴) ۱۴۴۰

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$\boxed{AA}$, $\boxed{GG}$, L , R , N , E

مثال: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت حروف یکسان، کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

جواب: $\frac{۸!}{۲!\times۲!} - ۶!$

تمرین: تعداد جایگشت های حروف کلمه ی SYSTEM به طوری که S ها کنار هم‌نباشند،کدام است؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ √ ۴) ۳۶۰

جواب: گزینه ۳

مثال: تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید؛ در چند حالت دو حروف w , a کنار هم قرار ندارند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲ √ ۳) ۴۸ ۴) ۸۲

جواب:

کل جایگشت ها − جایگشت هایی کهa, wکنار هم هستند $= ۵! - (۴! \times ۲!) = ۷۲$

مثال: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که:

الف) حروف صدا دار کنار هم باشند(o, u, e). جواب: $۶! \times ۳!$

ب) در آن ها کلمه‌ی $comp$ وجود داشته باشد. جواب: $۵!$

پ) حروف r, e, t, p کنار هم نباشند. جواب: $۸! - (۵! \times ۴!)$

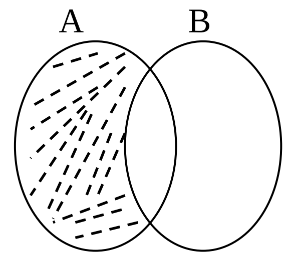
مثال: با حروف کلمه Media کلمه ای پنج حرفی به تصادف و بدون تکرار حروف ساخته ایم در چند حالت دو حرف M و e کنار هم هستند ولی دو حرف a , d کنار هم نیستند.

تعداد حالاتی که دو حرف e , M کنار هم هستند $= Me\,dia \implies ۴! \times ۲! = ۲۴ \times ۲ = ۴۸$

تعداد حالاتی که هم دو حرف M, e کنار هم و هم دو حرف a, d کنار هم هستند : $M\ e\ \ d\ a\ i$

$\implies ۳! \times ۲! \times ۲! = ۶ \times ۲ \times ۲ = ۲۴$

جواب : $۴۸ - ۲۴ = ۲۴$



A: $e\ , M$ کنار هم باشند

B: $a\ , d$ کنار هم باشند

$$\boxed{n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)}$$

مثال: در جایگشت های حروف کلمه ی *Coffee* تعداد حالاتی که f ها در کنار هم باشند ولی e ها کنار هم نباشند

چند تاست.

حالاتی که f ها کنار هم باشند: $f\,f\,c\;o\;e\;e \Longrightarrow \frac{۵!}{۲!} = ٦٠$

حالاتی که هم f ها و هم e ها کنار هم باشند: $f\,f\;\;e\,e\,c\;o \Longrightarrow ٤! = ٢٤$

تعداد حالات مطلوب مسئله $= ٦٠ - ٢٤ = ٣٦$

مثال: افراد A , B , C , D , E , F به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؛ به نحوی که A , B کنار هم باشند و E , F کنار هم نباشند؟

۱) ۱۶۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۴۴

جواب: حالت‌هایی که A, B کنار هم هستند را، منهای حالت‌هایی که A , B کنار هم هستند و $E\ , F$ نیز کنار هم هستند می کنیم.

تمرین: حروف کلمه‌ی $ATAXIA$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت ، سه حرف A در کنار هم قرار می گیرند؟ جواب : ۲۴

مثال: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر می‌باشند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. درچند حالت برادرها کنار هم نیستند؟

جواب:

(تعداد حالاتی که برادرها کنار هم باشند − کل حالات)= برادرها کنار هم نباشند

$$۶! - \frac{۵! \times ۲!}{۶!} =$$

مثال: از بین تمام کلمات پنج حرفی که از جایگشت حروف کلمه TEACH حاصل می شود، یک کلمه به تصادف انتخاب می کنیم؛ در چند حالت بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار می گیرد ؟

جواب: بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار گیرد؛ یعنی دو حرف A, E درکنار هم نیستند. بنابراین از متمم کمک می گیریم.

$$۵! - (۴! \times ۲!)$$

مثال: ارقام ۰و۱و۱و۲و۳ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که دو رقم ۱ همواره کنار هم باشند تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟

برای یافتن تعداد حالت های مطلوب دو رقم ۱ را با هم در نظر می گیریم پس ۴ شیء متمایز داریم که صفر نمی تواند سمت چپ باشد:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۸$$

مثال : با حروف کلمه « جهانگردی » و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « جهان » کنار هم باشند؟

مثال : ۴ زوج زن وشوهر به چند طریق می توانند در یک ردیف بنشینند هرگاه:

الف) زن ها سمت چپ باشند.

ب) زن ها کنار هم باشند.

ج) زن ها کنار هم و مردها کنار هم باشند.

د) هر زن و شوهر کنار هم باشند.

حل الف) چون قرار است زن ها کنار هم و سمت چپ باشند لذا واضح است که مردهاباید سمت راست باشند.

تعداد طرقی که زن ها می توانند سمت چپ قرار گیرند !۴ و تعداد طرقی که مردها سمت راست باشند نیز !۴ است

لذا جواب ۵۷۶ = !۴ × !۴ است.

ب) توجه کنید که زن ها کنار هم به این معنی نیست که مردها نیز کنار هم هستند. زن ها را یک نفر در نظر می گیریم در نتیجه این ۸ نفر به ۵ نفر تبدیل شده اند بنابراین. جواب ۲۸۸۰ = !۴ × !۵ است.

ج) زن ها را یک نفر و مردها را یک نفر در نظر می گیریم که در نتیجه این ۸ نفر به ۲ نفر تبدیل شده اند بنابراین جواب ۱۱۵۲ = !۴ × !۴ × !۲ است.

د) هر زن و شوهر را یک نفر در نظر می گیریم. در این صورت این ۸ نفر به ۴ نفر تبدیل می شوند که به !۴ می توانند در یک ردیف قرار گیرند. از طرفی هر زن و شوهری به !۲ می توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند لذا جواب ۳۸۴ = !۲ × !۲ × !۲ × !۲ × !۴ است.

مثال :با حروف کلمه « جهانگردی » و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که حروف «ی» و«د» کنار هم باشند؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که حروف کلمه « جهان» کنار هم باشند ؟

پ) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که کلمه « جهان» در آن به کار رفته باشد ؟

حل:الف) حروف «د» و «ی» به دو حالت «دی» و «ید» می توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به صورت «دی» در کنار هم آمده اند، کافی است این دو حرف را یک حرف در نظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت های هفت شیء متمایز را به دست آوریم که برابر است با !۷ . چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با !۷×۲.

ب) تعداد حالت های قرار گرفتن کلمه « جهان» در کنار هم برابر است با تعداد جایگشت های چهار شیء متمایز یعنی !۴. حال هر کدام از این جایگشت ها را که در نظر بگیریم، برای نوشتن کلمه ۸ حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه « جهان» را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با !۵. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با : !۵×!۴

پ) برای نوشتن کلمه ۸ حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه « جهان» را یک حرف حساب کنیم)؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با !۵.

مثال : ۵نفر دانشجو به چند طریق می توانند در یک ردیف بنشینند به طوری که دو نفر خاص از آن ها پهلوی هم باشند.

حل)چون قرار است دو نفر خاص پهلوی هم باشند، لذا آن دو نفر را یک نفر فرض می کنیم در نتیجه این ۵ نفر تبدیل به ۴ نفر شده که به تعداد !۴ می توانند در یک ردیف قرار گیرند. از طرفی آن دو نفر نیز به !۲ می توانند در کنار هم جایشان را عوض کنند لذا جواب ۴۸ = !۲ × !۴ است.

مثال: ۵نفر دانشجو به چند طریق می توانند در یک ردیف بنشینند به طوری که دو نفر خاص از آن پهلوی هم نباشند (مثلاً فرض کنید این دو نفر با هم قهر بوده و نمیخواهند کنار هم باشند).

حل) این ۵ نفر به تعداد !۵ می توانند در کنار یکدیگر قرار گیرند و مطابق مثال قبل، به تعداد !۲ × !۴ می توانند در کنار هم قرار گیرند به طوری که دو نفر خاص از آن ها کنار هم باشند. لذا کافی است این عدد را از کل حالات کم کرد یعنی جواب ۷۲ = !۲ × !۴ − !۵ است.

توجه : خواهشمندیم در صورت پرینت گرفتن یا کپی گرفتن از جزوه مبلغ ۵۰۰۰ تومان به عنوان حق تالیف به شماره کارت ۵۸۵۹۸۳۱۰۷۱۲۰۶۴۱۰ بانک تجارت به نام حبیب هاشمی واریز گردد.

با تشکر فراوان

۲-۵-۶قرار گرفتن اشیاءِ در یک جای خاص

مثال :با حروف کلمه « جهانگردی » و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که به حرف «ی» ختم شوند؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل الف) در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت ها روی هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر !۷ است.

ب) حروف اول باید یکی از سه حرف « ج»، «ن»،«ی» باشد. پس ۳ انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هر کدام از این ۳ حرف برای چینش ۷ حرف دیگر !۷ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با: !۷×۳

مثال: با حروف کلمه‌ی TARANEH چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

۱) ۳۶۰   ۲) ۲۴۰   ۳) ۷۲۰ √   ۴) ۱۴۴۰

جواب:

$$\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underset{A\text{حرف}}{\boxed{۱}}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=۶!$$

مثال: با حروف کلمه‌ی *ARAYEHA* چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حرف *A* همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underset{A\text{حرف}}{\boxed{۱}}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=\frac{۶!}{\underset{\text{تعداد }A\text{های تکراری}}{۲!}}=۳۶۰$$

تمرین: با حروف کلمه گل بهار چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که با حرف گ شروع و به حرف ب ختم شود؟

جواب: ۲۴

مثال: با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشتبه طوری که با «گل» شـروع می شود؟ !۴

مثال: با حروف کلمه‌یcomputer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حـروف r , c در اول و آخـر کلمـه باشند؟

جواب:

$$\underset{c}{\overset{\boxed{۲}}{(r)}} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{۶!} \times \underset{c}{\boxed{۱}} = ۶! \times ۲$$

مثال: ۶ نفرکه ۲ تای آن ها برادر هستند را در یک ردیف قرار می‌دهیم.در چنـد حالـت برادرهـا در اول و آخـر صـف قـرار دارند؟

جواب:

$$\boxed{۲} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{۴!} \times \boxed{۱}$$

مثال: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت:

الف) حروف R, L در اول و آخر کلمه قرار دارند؟

جواب:

$$\frac{۲ \times ۶!}{۲! \times ۲!}$$

ب)حروف R, G در اول و آخر کلمه قرار دارند؟

ج)حروف A, G در اول و آخر کلمه قرار دارند؟

۳-۵-۶یک در میان قرار گرفتن اشیاءِ:

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز، و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند، و $m = n$ باشد، تعداد حالت‌هایی که:

الف)m, n شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$(m! \times n!) \times ۲$

ب) فقط m شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$(m! \times n!) \times ۲$

ج) فقط n شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$(m! \times n!) \times ۲$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف، به طور یک در میان قرار داد؟

۱) !۴ × !۴ ۲) √ !۴ × !۴×۲ ۳) !۴ + !۴ ۴) !۴ × !۲ + !۴ × !۲

جواب: $۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب:$۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟(یعنی دخترها یک در میان باشند)

جواب:$۲ \times (۴! \times ۴!)$

مثال: با جابجایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ۹ ۲) √ ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

جواب: $\frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۳!} = \frac{۳! \times ۲}{۱} = ٦ \times ۲ = ۱۲$

مثال: در ساختن یک کلمه ی ۶ حرفی با حروف کلمه ی $PANAMA$ تعداد حالاتی که حروف A یک در میان باشند چند تاست؟

روش اول:

$\boxed{۱}\ \boxed{۳}\ \boxed{۱}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱}\ \boxed{۱} = ۶$

A P A N A M

N M

M

$\longrightarrow ٦ + ٦ = ۱۲$

$\boxed{۳}\ \boxed{۱}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{۱} = ۶$

P A A A

N

M

روش دوم:

$\frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۳!} = ۱۲$

تعداد تکرارها

> نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند $m = n + ۱$ باشد تعداد حالت‌هایی که:
>
> الف) n , m شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:
>
> $m! \times n!$
>
> ب) فقط m شیءِ(عدد بزرگتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با: $m! \times n!$
>
> ج) فقط n شیءِ(عدد کوچکتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با: $(m! \times n!) \times ۳$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری یک در میان قرار بگیرند؟

√۱) $۴! \times ۳!$ ۲) $۲ \times ۴! \times ۳!$ ۳) $۴! + ۳!$ ۴) $۲ \times ۴! + ۲ \times ۴!$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که دخترها یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳! \times ۳$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال: با جابجایی ارقام ۱۲۳۴۵۶۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که:

الف) ارقام فرد یک در میان باشند؟

جواب: $۳! \times ۴!$

ب) هیچ دو رقم فردی متوالی نباشند؟

جواب: $۳! \times ۴!$

ج) ارقام زوج یک در میان باشند؟

جواب: $۳ \times ۳! \times ۴!$

د) بین هر دو رقم فرد، یک رقم زوج قرار گیرد؟

جواب: $۳! \times ۴!$

مثال: سه نوع کتاب علمی متمایز، و چهار نوع کتاب ادبی متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب‌های علمی یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۴۳۲ √ ۴) ۵۷۶

جواب: $۴۳۲ = ۳ \times ۶ \times ۲۴ = ۳ \times ۳! \times ۴!$

مثال: پنج نفر a , b , c , d , e می‌خواهند در یک همایش سخنرانی کنند به چند طریق این ۵ نفر می‌توانند سخنرانی کنند، به طوری که بین سخنرانی a , b فقط یک نفر سخنرانی کند؟(سراسری ریاضی)

جواب: $(۲! \times ۳!) \times ۳$

۶-۶انتخاب اشیاء(ترتیب وترکیب)

در انتخاب k از n شیء متمایز دو حالت وجود دارد:

الف) اگر اولویت(تقدم و تاخر) اشیاء مهم باشد این نوع انتخاب را ترتیب می نامند و تعداد حالت های آن را از فرمول زیر به‌دست می آوریم.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ب) اگر اولویت (تقدم وتاخر) اشیاء مهم نباشد، این نوع انتخاب را ترکیب می نامیم و تعداد حالت های آن از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$c(n\,,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال: با حروف کلمه‌ی فردوسی چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $P(۶,۳) = \frac{۶!}{(۶-۳)!}$

در این مثال تقدم و تاخر اشیاء (حروف) مهم است به عنوان مثال اگر سه حرف (ف – ر- د) را از حروف کلمه فردوسی انتخاب کنیم می‌توان کلمه فرد و درف را باآن ساخت که باهم متفاوتند؛ یعنی با جابجایی حرف کلمه جدیدی ساخته می شود. به همین دلیل از ترتیب استفاده می شود.

مثال: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه شش عضوی $\{a, b, c, d, e, f\}$ را به‌دست آورید.

جواب: در این مثال تقدم و تاخر اشیا (عضوها) مهم نیست، برای مثال زیرمجموعه های $\{c, b, a\}$و$\{a, b, c\}$ با هم تفاوت ندارند به همین دلیل از ترکیب استفاده می‌کنیم. $c(۶,۳) = ۲۰$

مثال: در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد ترتیب r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب های r تایی از nشیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (با معنی و بی معنی) . ترتیب مهم است.

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز .ترتیب مهم نیست

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست ها توانایی بازی دارند. ترتیب مهم نیست

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. ترتیب مهم نیست

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. ترتیب مهم نیست

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال های طلا، نقره و برنز داده شود. ترتیب مهم است.

مثال: در هر کدام از موارد «مثال قبل» تعداد حالت های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

الف) $P(۵,۳)$ ب) $\binom{۵}{۳}$ پ) $P(۷,۳)$

ت) $\binom{۷}{۳}$ ث) $\binom{۱۰}{۳}$ ج) $P(۱۰,۳)$

روش سریع محاسبه ترکیب

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۲}} = \frac{۵ \times ۲}{۲ \times ۱} \quad , \quad \binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۱}} = \frac{۱۰}{۱} \quad , \quad \binom{\boxed{۵}}{\boxed{۳}} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۵}} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} , \binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۲}} = \frac{۱۰ \times ۹}{۲ \times ۱} , \binom{\boxed{۶}}{\boxed{۳}} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

نکته: دانستن مطالب زیر در محاسبه ترکیب ها ، و در بعضی موارد انجام محاسبات را ساده می کند. برای هر عدد صحیح مثبت n و a و b , داریم

$\binom{n}{۰} = ۱ \quad , \quad \binom{n}{۱} = n \quad , \quad \binom{n}{n} = ۱$

مثال

$\binom{۵}{۰} = ۱ \quad , \quad \binom{۵}{۱} = ۵ \quad , \quad \binom{۵}{۵} = ۱$,

نکته :اگر $a + b = n$ آنگاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$.

$\binom{۵}{۲} = \binom{۵}{۳} \quad , \quad \binom{۸}{۲} = \binom{۸}{۶} \quad , \quad \binom{۵}{۵} = \binom{۵}{۰} \quad , \quad \binom{۱۰۰}{۹۸} = \binom{۱۰۰}{۲}$

مثال: هفت نقطه روی دایره ای قرار دارند، حساب کنید که با این هفت نقطه:

الف)چند پاره خط ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ب)چند بردار ایجاد می‌شود؟

جواب: $P(۷,۲)$

ج)چند مثلث ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۳)$

چ) چند وتر ساخته می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ح)چند چهار ضلعی محدب که هر راس چهار ضلعی واقع بر یک نقطه باشد می توان ساخت؟

جواب: $C(۷,۴)$

مثال: هفت نقطه A وB وC وD وE وF وG روی محیط دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$\binom{۷}{۳} = ۳۵$

مثال: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند؛ می خواهیم از بین آن ها:

الف)۳ نفر انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم نیست، پس:

$$C = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱} = ۲۲۰$$

ب)یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان‌پذیراست.

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم است، پس:

$$P = (۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = ۱۳۲۰$$

مثال: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$\mathrm{P}(٦,٤) = \frac{٦!}{٢!} = \frac{٦\times٥\times٤\times٣\times٢!}{٢!} = ٣٦٠$$

مثال: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

$$\mathrm{P}(١٨,٣) = \frac{١٨!}{١٥!} = \frac{١٨\times١٧\times١٦\times١٥!}{١٥!} = ٤٨٩٦$$

مثال : از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل:

الف) چون ترتیب چیدن کتاب ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت های چهارتایی از شش شیء متمایز؛ یعنی $P(٦,٤) = \frac{٦!}{(٦-٤)!} = ٣٦٠$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب ها اهمیت ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیر مجموعه های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با:

$$\binom{٦}{٤} = \frac{٦!}{(٦-٤)!\,٤!} = ١٥$$

مثال: در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$۲ \times P(۲۰,۳) = ۱۳۶۸۰ \text{ ثانیه}$$

مثال: به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به طوری که در هر کمیته ۲ دانش-آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ √

جواب: $\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۳} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$

مثال: به چند طریق از بین ۵ زن و ۴ مرد، انجمنی ۳ نفری می‌توان تشکیل داد به طوری‌که:

الف) فقط یک نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یکی از زنها و دوتا از مردها $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}$

ب) هر سه نفر همجنس باشند.

جواب: یعنی هر سه مرد باشند یا هرسه زن $\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳}$

پ) حداقل یک نفر آن ها مرد باشد.

جواب: یعنی یا یکی از مردها انتخاب بشه، یا دوتا، و یا هرسه تا مرد باشند. پس داریم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}$$

ت) حداکثر دو نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یا دو تا از آن‌ها زن باشه یا یکی، و یا هیچکدام از آن‌ها

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}$$

مثال: از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد، به طوری که لااقل دو نفراز آن ها دانش‌آموز تجربی باشند؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ √

جواب: $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰}=۱۰\times۳+۱۰\times۱=۴۰$

مثال: به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی، ۴مهره سبز، و۲ مهره زرد۳ مهره انتخاب کنیم، به طوری که:

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

ب)هر ۳ مهره آبی باشند ؟

جواب: $C(۵,۳)$

ج) هر سه مهره سبز باشند؟

جواب: $C(۴,۳)$

چ) دو مهره آبی و یک مهره سبز باشد ؟

جواب: $C(۵,۲)\times C(۴,۱)$

ح) دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۵,۲)\times C(۶,۱)$

خ) هر سه مهره همرنگ باشند؟

جواب: $C(۵,۳)+C(۴,۳)$

د) مهره ها همرنگ نباشند؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۳)+C(۴,۳)]$

ز)حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۳)+C(۴,۳)]$

ذ) مهره ها متمایز باشند؟ (هیچ دو مهره ای همرنگ نباشد)

جواب: $C(۵,۱)\times C(۴,۱)\times C(۲,۱)$

ر) حداقل دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)-[C(۵,۱)\times C(۴,۱)\times C(۲,۱)]$

س) مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند؟

جواب:

$$C(۱۱,۳)-\left[C(۵,۳)+C(۴,۳)+\left(C(۵,۱)\times C(۴,۱)\times C(۲,۱)\right)\right]$$

ش) حداقل یک مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۰) \times C(۶,۳)]$

ل) حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۳) \times C(۶,۰)]$

م) حداکثر دو مهره زرد باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

مثال : از بین ۶ دانشجوی مدیریت و ۳ دانشجوی حسابداری چند کمیته ۵ نفره می توان تشکیل داد به طوری که:

الف) رشته مهم نباشد.

ب) ۳ دانشجوی مدیریت و ۲ دانشجوی حسابداری در این کمیته باشد.

ج) دست کم یک نفر دانشجوی حسابداری در این کمیته باشد.

حل) توجه کنید که چون می خواهیم یک کمیته تشکیل دهیم و یک کمیته در واقع یک گروه است لذا باید از فرمول ترکیب استفاده کرد.

الف) چون رشته مهم نیست لذا مجموعاً ۹ شیء متمایز داریم که می خواهیم از بین آن ها یک دسته ۵ تایی انتخاب کنیم. تعداد همه دسته ها یا ترکیب های ۵ تایی ۹ شی متمایز نبز برابر است با

$$c_{۹,۵} = \binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۵!\,(۹-۵)!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!\,۴!} = ۱۲۶$$

ب) ابتدا از بین ۶ دانشجوی مدیریت تعداد ۳ نفر را انتخاب می کنیم که این کار را به $\binom{۶}{۳}$ می توان انجام داد و سپس از بین ۳ دانشجوی حسابداری ۲ نفر را انتخاب می کنیم که این کار را به $\binom{۳}{۲}$ می توان انجام داد. لذا چواب $\binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۲} = ۲۰ \times ۳ = ۶۰$ است.

ج) حداقل یک نفر دانشجوی حسابداری یعنی در این کمیته باید یک نفر دانشجوی حسابداری (و در نتیجه ۴ نفر دانشجوی مدیریت) باشد که جواب $\binom{٦}{٤}\binom{٣}{١}$ است.

یا دو نفر دانشجوی حسابداری (و در نتیجه ۳ نفر دانشجوی مدیریت) باشد که جواب $\binom{٦}{٣}\binom{٣}{٢}$ است. یا سه نفر دانشجوی حسابداری (و در نتیجه ۲ نفر دانشجوی مدیریت) باشد که جواب $\binom{٦}{٢}\binom{٣}{٣}$ است.

لذا جواب $١٢٠ = ١٥ + ٦٠ + ٤٥ = \binom{٦}{٢}\binom{٣}{٣} + \binom{٦}{٣}\binom{٣}{٢} + \binom{٦}{٤}\binom{٣}{١}$ است.

مثال: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایشی برداشته شوند، درچند حالت فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ جواب: $\binom{۵}{۳} \times \binom{۳}{۱}$

مثال: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن ها خارج می کنیم، درچند حالت لااقل یکی از موش ها سفید است؟

جواب: خواسته سوال ۱یا ۲ یا ۳ تا از موش ها سفید باشند متمم آن برابر هیچ‌کدام سفید نباشند.

$$\binom{۱۱}{۳} - \binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳} = ۱۶۵ - ۲۰ = ۱۴۵$$

مثال: در آزمایشگاهی ۴ موش سفید و ۷ موش سیاه نگهداری می شوند. سه موش به تصادف بیرون می آوریم، در چند حالت تعداد موش های سیاه بیشتر باشد ؟

$$\binom{۷}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۷}{۳}\binom{۴}{۰} = ۲۱ \times ۴ + ۳۵ \times ۱$$

مثال: از بین ۳ موش سفید، ۴ موش سیاه و ۵ موش خاکستری، ۳ موش به تصادف انتخاب می کنیم. در چند حالت حداقل دو موش همرنگ است؟

جواب: برای به‌دست آوردن تعداد حالات حداقل دو موش همرنگ باشد، از متمم استفاده می‌کنیم. که متمم آن برابراست با هیچ دو موشی مثل هم نباشد (موش‌ها متمایز باشند).

$$\binom{۱۲}{۳} - \binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}$$

مثال: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند؛ اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آن ها انتخاب شوند در چند حالت، تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوتند؟

جواب: متمم این مساله برابر است با تعداد افراد انتخابی مساوی باشند.

$$\binom{۱۰}{۴} - \binom{۴}{۲}\binom{۶}{۲}$$

مثال : از بین ۸ نفر دانش آموز که دو نفر از آن ها برادر هستند به چند طریق می توان کمیته ای ۵ نفره تشکیل داد به طوری که :

الف) فقط یک نفر از دو برادر در این کمیته باشد.

ب) هر دو برادر در کمیته باشند.

حل الف) ابتدا از بین دو برادر یک نفر را انتخاب می کنیم $\left[\binom{۲}{۱}\right]$ و سپس از بین ۶ نفر باقی مانده ۴ نفر را انتخاب می کنیم $\left[\binom{٦}{٤}\right]$ لذا جواب $۳۰ = ۱۵ \times ۲ = \binom{٦}{٤}\binom{۲}{۱}$ است.

ب) ابتدا هر دو برادر را در کمیته قرار می دهیم $\left[\binom{۲}{۲} = ۱\right]$ و سپس از بین ۶ نفر باقی مانده ۳ نفر را انتخاب می کنیم $\left[\binom{٦}{۳}\right]$ لذا جواب $۲۰ = \binom{٦}{۳}\binom{۲}{۲}$ است

مثال: ۱۲ زندانی را به چند طریق می توان در سه سلول به ترتیب ۳ نفره، ۴ نفره ، ۵ نفره ، جای داد؟

حل : ابتدا از بین ۱۲ نفر، ۳ نفر را انتخاب کرده و در سلول ۳ نفره قرار می دهیم $\binom{۱۲}{۳}$ سپس از بین ۹ نفره باقی مانده ۴ نفر را انتخاب کرده و در سلول چهار نفره قرار می دهیم $\binom{۹}{۴}$ و در نهایت ۵ نفر باقی مانده را در سلول ۵ نفره قرار می دهیم $\binom{۵}{۵}$ لذا جواب

$$\binom{۱۲}{۳}\binom{۹}{٤}\binom{۵}{۵} = ۲۷۷۲۰$$

مثال: از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

$$\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}\times\binom{8}{2}=10\times 15\times 28=4200$$

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

$$\binom{5}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{8}{1}=5\times 6\times 8=240$$

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

$$\binom{8}{1}\times\binom{11}{1}+\binom{8}{2}=88+28=116$$

مثال: یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

الف) $\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{14}{3}=1\times 3\times 364=1092$

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) $\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{11}{2}=1\times 3\times 3\times 55=495$

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\binom{۱}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۹}{۱} = ۱ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۹ = ۱۶۲ \text{ (پ}$$

مثال: گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

$$\binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{٤} + \binom{۱۰}{٥} = ۱۲۰ + ۲۱۰ + ۲٥۲ = ٥۸۲$$

مثال: یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

$$\binom{٤}{۲} + \binom{٤}{۳} + \binom{٤}{٤} = ٦ + ٤ + ۱ = ۱۱$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می شود، اما تعداد رنگ های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ ها یکسان نباشد به طور مثال یکبار ۵۰ ٪ از یک رنگ و ۵۰٪ از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰٪ از یکی و ۴۰٪ از دیگری استفاده شود و در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

مثال : از بین ۵ جلد کتاب با عناوین مختلف، به چند طریق می توان

الف) سه جلد از آن ها را به یک نفر هدیه داد.

ب) سه جلد از آن ها را در یک قفسه چید.

حل الف) چون می خواهیم سه جلد از بین ۵ جلد را هدیه بدهیم، لذا این سه جلد تشکیل یک دسته سه تایی از این ۵ کتاب را می دهند و در نتیجه تعداد همه دسته ها یا ترکیب های سه تایی که می توان با این ۵ کتاب تشکیل داد برابر است با

$$c_{۵,۳} = \binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!\,(۵-۳)!} = ۱۰$$

ب) در این حالت سه جلد کتاب تشکیل یک صف می دهند لذا تعداد همه صف ها یا ترتیب های سه تایی این ۵ جلد کتاب برابر است با

$$P_{۵,۳} = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۶۰$$

مثال :به چند طریق می توان از بین ۵ فوتبالیست، یک دروازه بان و یک کاپیتان انتخاب کرد.

حل)چون مکان این دو نفر دارای ارزش است (یک نفر دروازه بان و دیگری کاپیتان) لذا باید تعداد همه صف ها یا ترتیب های دوتایی این ۵ نفر را حساب کرد.

$$P_{۵,۲} = \frac{۵!}{(۵-۲)!} = ۲۰$$

مثال: تعداد قطر های یک n ضلعی محدب را به‌دست آورید.

جواب: تعداد کل پاره خط ها برابر $C(n,۲)$ است، که برای تعداد قطرها بایستی تعداد اضلاع یعنی n را از کل پاره خط ها کم کنیم. $C(n,۲) - n$

مثال: از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن‌که:

الف) ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۴} \times \binom{۵}{۴}$

ب) ۵ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب:$\binom{۵}{۳} \times \binom{۵}{۵}$

پ) حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟(سراسری ریاضی ۸۹)

جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۵} + \binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴}$

ت) حداکثر ۳ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۵} \times \binom{۵}{۳}$

مثال : در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

حل:الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیر مجموعه های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با:

$$\binom{۹}{٤} = \frac{۹!}{٥!\,٤!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٤ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲٦$$

ب) تعداد روش های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با: $\binom{۴}{۱} = ۴$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش های انجام این کار برابر است با:

۴×۳×۲ =۲۴

پ) تعداد راه های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با: ۶ = $\binom{4}{2}$. حال ۳ داور دیگر باید از بین ۵ داور غیر ایرانی انتخاب شوند که به ۱۰ = $\binom{5}{3}$ حالت می توانند انتخاب شوند. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد روش های انجام کار برابر است با: ۶۰=۱۰×۶

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می تواند باشد. در حالتی که داوران ایرانی ۳ نفر باشند، این داوران به ۴ = $\binom{4}{3}$ حالت می توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفر دیگر باید از بین ۵ داور غیر ایرانی انتخاب شوند که این کار به ۱۰ = $\binom{5}{2}$ طریق می تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب ۴۰=۴×۱۰ روش وجود دارد.

در حالتی که داور ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به ۱ = $\binom{4}{4}$ روش صورت می گیرد و یک داور دیگر باید از بین ۵ داور غیر ایرانی انتخاب شود که به ۵ = $\binom{5}{1}$ طریق می تواند صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت ۵=۱×۵ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با ۴۵= ۵+۴۰.

ث) تعداد روش های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با: ۴ = $\binom{4}{3}$، تعداد روش های انتخاب ۲ داور ژاپنی برابر است با: ۳ = $\binom{3}{2}$ وتعداد راه های انتخاب ۲ داور روس برابر است با ۱ = $\binom{2}{2}$ لذا طبق ضرب، جواب برابر است با : ۱۲= ۴×۳×۱.

ج) می دانیم تعداد کل کمیته های ۵ نفره که می توان انتخاب کرد، برابر اسست با ۱۲۶ = $\binom{9}{5}$.

از طرفی این کمیته های ۵ نفره به دو دسته زیر تقسیم می شوند:

دسته اول: حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دسته دوم : هیچ داور ایرانی در آنها نیست.

جمع افراد این دو دسته برابر ۱۲۶ می شود و از آنجا که محاسبه دسته دوم آسان تر است، کافی است تعداد دسته دوم را محاسبه کنیم و از ۱۲۶ کم کنیم.

اما تعداد افراد دسته دوم برابر $\binom{۵}{۵} = ۱$ است. چرا؟

با توجه به این که می خواهیم داور ایرانی درون آن نباشد، هر ۵ نفر را از ۵ نفر داور ژاپنی و روس انتخاب می کنیم

لذا تعداد افراد دسته اول برابر است با : ۱۲۵=۱-۱۲۶

مثال: یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخود چی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟

$$\binom{۷}{۵} + \binom{۷}{۶} + \binom{۷}{۷} = ۲۸ + ۷ + ۱ = ۳۶$$

مثال: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟ $\binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$

ب) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

تعداد حالاتی که هر سه استفاده شده $-$ تعداد کل حالات $=$ تعداد حالاتی که هر سه نباید استفاده شوند

$$=\binom{۱۰}{۳}-\binom{۳}{۳}=۱۲۰-۱=۱۱۹$$

پ) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

هر سه ادویه باید از دسته اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته ی دوم انتخاب شوند. بنابراین:

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۳}=۱۰+۱۰=۲۰$$

مثال: اگر $\frac{p(n,۴)}{c(n-۱,۴)}=۲۶$ باشد مقدار n کدام است؟(سراسری تجربی ۸۴ خارج از کشور)

۱) ۵۲ √ ۲) ۵۳ ۳) ۵۴ ۴) ۵۵

جواب:

$$p(n,۴)=\frac{n!}{(n-۴)!}$$

$$c(n-۱,۴)=\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۴)!\times ۴!}=\frac{(n-۱)!}{(n-۵)!\times ۴!}$$

$$\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)}=\frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۵)!\times ۴!}}=۲۶\Rightarrow\frac{n!\times(n-۵)!\times ۴!}{(n-۱)!\times(n-۴)!}=۲۶$$

$$\Rightarrow\frac{n\times(n-۱)!\times(n-۵)!\times ۲۴}{(n-۱)!\times(n-۴)(n-۵)!}=۲۶\Rightarrow\frac{۲۴n}{n-۴}=۲۶$$

$$\Rightarrow ۲۴n=۲۶n-۱۰۴\rightarrow ۲n=۱۰۴\rightarrow n=۵۲$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $C(n,۱)=۵n-۸$

جواب:

$$C(n,۱)=n\rightarrow n=۵n-۸\rightarrow ۴n=۸\rightarrow n=۲$$

ب) $P(n,n)=P(n,n-۱)$

جواب:

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=n!$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{n},\mathrm{n}-۱)=\frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-(\mathrm{n}-۱))!}=\frac{\mathrm{n}!}{۱!}=\mathrm{n}!$$

مثال: از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

$$\mathrm{P}(\mathrm{n},۳)=\frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-۳)!}=\mathrm{n}(\mathrm{n}-۱)(\mathrm{n}-۲)=\underbrace{۷\times ٦\times ٥}_{۲۱۰}\Rightarrow \mathrm{n}=۷$$

مثال: در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشند بنابراین:

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow \mathrm{n}(\mathrm{n}-۱)=٥٦=۸\times۷\Rightarrow \mathrm{n}=۸$$

مثال: از میان ۴ جفت کفش متمایز، به چند طریق می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ جفتی در میان آن ها نباشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب سه جفت کفش}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت اول}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت دوم}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه از جفت سوم}}$$

ب) در میان آن ها یک جفت وجود داشته باشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک جفت (دو لنگه)}} \times \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{انتخاب یک لنگه}}$$

مثال: از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی ، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

روش اول: از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته سوم کسی انتخاب نشود؛ لذا سه حالت زیر را می توان در نظر گرفت:

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰} = ۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۰}\binom{۲}{۱} = ۲ \times ۱ \times ۲ = ۴$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{۲}{۰}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۱ \times ۲ \times ۲ = ۴$$

پس در کل ۱۲=۴+۴+۴ حالت امکان دارد.

روش دوم: در یک مرحله ابتدا تعداد حالت های انتخاب دو رشته ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می کنیم که به $\binom{۳}{۲}$ راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشته انتخاب شده یک فرد انتخاب می کنیم لذا جواب برابر است با: $\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}$

مثال: ۶ زوج داریم به چند طریق می‌توان ۴ نفر از آن ها را به‌طور تصادفی انتخاب کرد، به طوری که:

الف) هیچ زن و شوهری در بین آن ها نباشد.

جواب: $\binom{6}{4}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}$

ب) فقط یک زوج در بین آن ها باشد.

جواب:

روش اول:

$$\underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{یک زوج از بین ۶ زوج انتخاب می کنیم.}} \times \underbrace{\binom{5}{2}\times\binom{2}{1}\binom{2}{1}}_{\text{از بین ۵ زوج باقیمانده ۲ زوج انتخاب کرده سپس از هر کدام یک نفر انتخاب می کنیم}}$$

روش دوم:

$$\binom{6}{1}\times\left(\binom{10}{2}-5\right)$$

مثال: از هریک از مدارس $A\ ,B\ ,C\ ,D\ ,\ E$ چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز دو به دو غیر هم مدرسه ای انتخاب کرد.(سراسری تجربی ۹۲)

جواب: $\binom{5}{3}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}=640$

مثال: سه عدد از بین اعداد طبیعی یک رقمی انتخاب می کنیم اگر با این سه رقم یک عدد درست کنیم در چند حالت مجموع ارقام آن زوج است؟

اعداد طبیعی یک رقمی: ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱

برای اینکه مجموع ارقام زوج باشد دو حالت داریم:

حالت اول: هر سه رقم از بین ارقام زوج انتخاب شوند یعنی هر سه رقم از بین ارقام ۸، ۶، ۴، ۲ انتخاب شوند.

$\binom{4}{3}=4$

حالت دوم: دو رقم از اعداد فرد انتخاب شوند و یک رقم از ارقام زوج یعنی دو رقم از بین ارقام ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ و یک رقم از بین ارقام ۸، ۶، ۴، ۲

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$$

پس کل حالات : ۴۴ = ۴۰ +۴

۱-۶-۶تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه‌ی {۱،۲،۳،۴،۵،۶} کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ √ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

جواب: $\binom{6}{4} = \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} = 15$

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی از مجموعه‌ی {۱،۲،۳،۴،۵،۶} کدام است؟

جواب: $\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6}$

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های هریک از مجموعه های زیر را به‌دست آورید؟

الف) $A = \{a, b\}$

جواب: $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2^2 = 4$

ب) $B = \{a, b, c\}$

جواب: $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8$

پ) $C = \{a, b, c, d\}$

جواب: $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$

ت) $D = \left\{\underbrace{a, b, c, \ldots}_{\text{تا } n}\right\}$

جواب: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

مثال: حاصل عبارت $\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8}$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۲۵۵ √ ۳) ۲۵۶ ۴) ۵۱۱

جواب:

$$\binom{۸}{۱}+\binom{۸}{۲}+\cdots+\binom{۸}{۸}=۲^۸-\binom{۸}{۰}=۲^۸-۱=۲۵۶-۱=۲۵۵$$

مثال: اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه برابر ۴۵ باشد، تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی آن کدام است؟

۱) ۵۶   ۲) ۱۲۰ √   ۳) ۲۱۰   ۴) ۴۶۵

جواب:

$$\binom{n}{۲}=۴۵\Rightarrow\frac{n\times(n-۱)}{۲\times۱}=۴۵\ \rightarrow n(n-۱)=۹۰\rightarrow n=۱۰$$
$$\rightarrow\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=۱۲۰$$

مثال: می دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه های r تایی از یک مجموعه n عضوی است. حال $\binom{n}{۰}$ و $\binom{n}{۱}$ را یک بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$، و یک بار با فرمول ، به دست آورید.

هر مجموعه ی n عضوی دارای یک زیر مجموعه ی هیچ عضوی به نام تهی است بنابراین :

$$\binom{n}{۰}=\frac{n!}{۰!\times n!}=۱\xleftarrow{\text{اثبات به کمک فرمول}}\binom{n}{۰}=۱$$

هر مجموعه ی n عضوی دارای n زیر مجموعه ی یک عضوی است بنابراین :

$$\binom{n}{۱}=\frac{n!}{۱!\times(n-۱)!}=\frac{n(n-۱)!}{۱\times(n-۱)!}=\xleftarrow{\text{اثبات به کمک فرمول}}\binom{n}{۱}=n$$

۲-۶-۶ترکیب های خاص (شامل و فاقد)

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که حتماشامل m انتخاب اجباری باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r-m}$

مثال: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که شخص به خصوصی حتما در میان آن ها باشد؟

۱) ۵۶   ۲) ۲۱ √   ۳) ۲۸   ۴) ۳۵

جواب: $\binom{۸-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲\times۱} = ۲۱$

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که فاقد m شیءِ به خصوص باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r}$

مثال: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که یک شخص به خصوصی حتما در میان آن ها نباشد؟

۱) ۵۶   ۲) ۲۱   ۳) ۲۸   ۴) ۳۵ √

جواب: $\binom{۸-۱}{۳} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱} = ۳۵$

مثال: از بین ۱۰ نفر فوتبالیست به چند طریق می‌توان ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که بهترین بازیکن در بین آن ها باشد و بدترین بازیکن در بین آن ها نباشد؟

۱) $\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۹}{۳}$ ۳) $\binom{۹}{۴}$ ۴) $\binom{۸}{۴}$

جواب: حاصل برابر است با $\binom{۸}{۳}$ که جز گزینه های داده شده نیست، ولی داریم اگر:

$a + b = n$ آنگاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$

دراین‌صورت:

$$\binom{۸}{۳} = \binom{۸}{۵}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه سه عضوی مجموعه $\{a , b , c , d , e , f\}$ که:

الف) شامل a باشد کدام است؟(سراسری تجربی ۸۳)

جواب: $\binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲\times۱} = ۱۰$

ب) شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۵}{۳} = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = ۱۰$

ت) شامل a باشد ولی شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۴}{۲} = \frac{۴\times۳}{۲\times۱} = ۶$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که اعداد ۲ و ۵ همزمان در آن ها نیستند؟(یعنی اگر یکی از این اعداد داخل مجموعه باشد اشکال ندارد).

۱) ۳۵   ۲) ۲۵ √   ۳) ۲۰   ۴) ۳۰

جواب:

$$\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{کل مجموعه های ۴ عضوی}} - \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی شامل ۲ و ۵}}$$

$$= \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} - \frac{۵ \times ۴}{۲ \times ۱} = ۳۵ - ۱۰ = ۲۵$$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۴ عضوی دارد که شامل اعداد ۲ و ۵ نباشد؟

جواب: یعنی هم ۲ در آن نباشد و هم۵ پس برابر است با: $\binom{۵}{۴}$

مثال: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟ $۱۲۰ = \binom{۱۰}{۳}$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟

اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقیمانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

$\binom{۸}{۱} =$ تعداد حالات وجود دو ادویه با هم

تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده می شوند $-$ تعداد کل حالات $=$ تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده نشوند .

$$= \binom{۱۰}{۳} - \binom{۸}{۱} = ۱۲۰ - ۸ = ۱۱۲$$

تنها حالت جمع دو ترکیب:

مثال: به قسمت های زیر توجه کنید:

الف) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با : $\binom{۲۶}{۵}$

ب) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با: $\binom{۲۵}{۴}$

پ) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{۲۵}{۵}$

ت) بنابراین: $\binom{۲۵}{۵}+\binom{۲۵}{۴}=\binom{۲۶}{۵}$

مثال: فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. $(a \in A)$

الف) تعداد زیر مجموعه های r عضوی مجموعه A برابر است با : $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیر مجموعه های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-۱}{r-۱}$

پ) تعداد زیر مجموعه های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با : $\binom{n-۱}{r}$

ت) بنابراین $\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r}=\binom{n}{r}$

مثال: حاصل عبارت $\binom{۲۵}{۹}+\binom{۲۵}{۱۰}$ برابر است با:

۱) $\binom{۲۶}{۱۰}$ √   ۲) $\binom{۲۵}{۱۱}$ ۳) $\binom{۲۶}{۱۱}$ ۴) $\binom{۵۰}{۱۹}$

جواب: $\binom{۲۵+۱}{۱۰}=\binom{۲۵}{۹}+\binom{۲۵}{۱۰}$

مثال: حاصل عبارت $\binom{۱۰}{۵}+۲\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۳}$ برابر است با:

۱) $\binom{۱۲}{۵}$ √   ۲) $\binom{۱۲}{۶}$ ۳) $\binom{۱۱}{۶}$ ۴) $\binom{۱۰}{۶}$

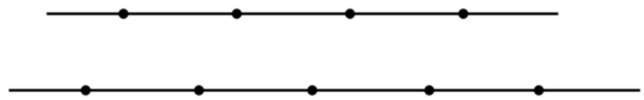
جواب:

$$\binom{۱۰}{۳}+۲\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}=\underbrace{\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}}_{\binom{۱۱}{۴}}+\underbrace{\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}}_{\binom{۱۱}{۵}}$$

$$=\binom{۱۱}{۴}+\binom{۱۱}{۵}=\binom{۱۲}{۵}$$

۴-۶-۶ مسائل هندسی ترکیب

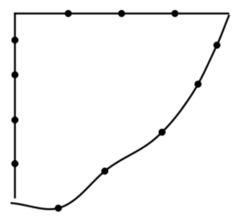
مثال: با نقاط مشخص شده در شکل زیر چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ √ ۴) ۸۰

جواب: $\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۱}=۴\times۱۰+۶\times۵=۷۰$

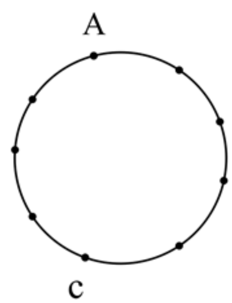
مثال: با نقاط مشخص شده در شکل زیر، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۲۲۰ ۲) ۱۸۵ ۳) ۲۱۵ √ ۴) ۲۴۰

جواب: $\binom{۱۲}{۳}-\left[\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}\right]=۲۲۰-(۱+۴)=۲۲۰-۵=۲۱۵$

مثال: در شکل مقابل چند چهار ضلعی با نقاط داده شده می‌توان رسم کرد که:



الف) Ac ضلع چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}=۳+۶=۹$

ب) Ac قطر چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۳\times۴=۱۲$

۵-۶-۶انتخاب همراه با جایگشت

در بعضی مسائل علاوه بر انتخاب اشیاءِ آن‌ها را در کنار هم می‌چینیم. به این نوع مسائل انتخاب همراه با جایگشت می گوئیم.

مثال: با حروف کلمه‌ی $computer$ چند کلمه‌ی ۵ حرفی با معنی و بی معنی می‌توان ساخت؟ به طوری که:

الف) در همه‌ی آن ها حرف r به کار رفته باشد.حل) چون r درکلمات به کار رفته پس یک حرف انتخاب شده است .چهار حرف دیگر را از بین هفت حرف باقیمانده به $\binom{۷}{۴}$ انتخاب می کنیم حال جایگشت این پنج شی برابر است با $۵!$ طبق اصل ضرب کل حالات برابر است با $۵! \times \binom{۷}{۴}$

ب) در همه‌ی آن ها حروف r , u به کار رفته باشد. حل) چون حروف r , u درکلمات به کار رفته پس دو حرف انتخاب شده است .سه حرف دیگر را از بین شش حرف باقیمانده به $\binom{۶}{۳}$ انتخاب می کنیم حال جایگشت این پنج شی برابر است با $۵!$ طبق اصل ضرب کل حالات برابر است با $۵! \times \binom{۶}{۳}$

ج) در آن ها حروف r, u به کار نرفته باشد. . حل) چون حروف r , u درکلمات نباید به کار رود پس پنج حرف را از بین شش حرف باقیمانده به $\binom{۶}{۵}$ انتخاب می کنیم حال جایگشت این پنج شی برابر است با $۵!$ طبق اصل ضرب کل حالات برابر است با $۵! \times \binom{۶}{۵}$

مثال: انجمن فرهنگ و هنر دانشگاه ۶ نفر عضو دارد. به چند طریق می‌توان از بین این ۶ نفر یک نفر رئیس، یک معاون اجرایی و یک مسئول امور مالی انتخاب کرد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰ √

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۳! = \frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱} \times ۶ = ۲۰ \times ۶ = ۱۲۰$

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توانیم بسازیم؛ به طوری که دو رقم از عدد سه رقمی ساخته شده زوج باشد؟

جواب:

$$\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو رقم از زوج ها}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک رقم از فرد ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ارقام}}$$

مثال: با ارقام ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ چند عدد سه رقمی با شرط رقم صدگان> رقم دهگان > رقم یکان می‌توان نوشت؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ √ ۴) ۱۲

$$\text{جواب:}۱۰ = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = \underbrace{۱}_{\text{فقط یک حالت وجود دارد که با سه رقم شرط برقرار شود.}} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ عدد از ۵ عدد}}$$

تمرین: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یکی در میان در قفسه‌ای چید؟

۱) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳!$ ۲) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

۳) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$ ۴) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در قفسه‌ای چید؛ به طوری که:

الف) کتاب‌های سال اول یکی در میان باشند.

جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۳$

ب) هیچ دو کتاب سال دومی متوالی نباشد.

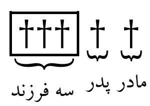
جواب: $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$

مثال: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۶ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، تعداد حالتی که افراد این خانواده :

الف) کنار هم قرار می گیرند چندتاست؟ $P(۶,۵)$

ب) روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند چندتاست؟

جواب:



$$\underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۲}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

مثال: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۷ صندلی و در یک ردیف می‌نشینندتعداد حالتی که افراد این خانواده :

الف) کنار هم قرار می گیرند چندتاست؟ $P(۷,۵)$

ب) روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند چندتاست؟

جواب:

$$\underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۳}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

مثال: تعداد ۷ نفر که ۲ برادر در بین آن ها حضور دارند، مفروضند. از بین آن ها ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم و در یک ردیف کنار هم می نشانیم، در چند حالت دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف نشسته اند؟

حل) برای آن که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند باید حتما در بین انتخاب شده ها باشند. در نتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقیمانده را انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند:

$$\boxed{۲} \times \boxed{\binom{۵}{۳} \times ۳!} \times \boxed{۱} = ۱۲۰$$

مثال: ۶ کتاب ادبیات متمایز و ۲ کتاب شیمی متمایز را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم چید به طوری که دقیقاً ۲ کتاب ادبیات بین ۲ کتاب شیمی قرار گیرد.

۱) ۹۲۰ ۲) ۱۹۲۰ ۳) ۷۲۰۰ ۴) ٤٨٠٠

حل: ابتدا باید ۲ کتاب ادبیات را از بین ۶ کتاب انتخاب کنیم این کار به $\binom{۶}{۲}$ حالت امکان پذیر است. دقیقاً ۲ کتاب ادبیات بین دو کتاب شیمی قرار دارد لذا داریم. (شیمی، ادبیات، ادبیات، شیمی) که کتاب های شیمی و ادبیات هر کدام در این دسته !۲ چیدمان دارند. در آخر، دسته ی بیان شده همراه چهار کتاب ادبیات دیگر !۵ جایگشت دارند در مجموع داریم:

$$\binom{۶}{۲} \times ۲! \times ۲! \times ۵! = ۷۲۰۰$$

مثال: با حروف کلمه $MEDIAN$ چند کلمه سه حرفی می توان نوشت به طوری که شامل حرف A باشد.

حل) ابتدا حرف A را کنار می گذاریم (که این کار را به یک طریق می توان انجام داد). سپس از بین ۵ حرف باقی مانده یک دسته ۲ تایی انتخاب می کنیم که این کار را به $\binom{۵}{۲}$ می توان انجام داد. پس از آن این سه حرف را در کنار هم قرار می دهیم که این کارها به !۳ می توان انجام داد لذا جواب $۱ \times \binom{۵}{۲} \times ۳! = ٦٠$ است.

مثال : با حروف کلمه « جهانگردی » و بدون تکرار حروف؛ چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت به طوری که

الف) به « گردی» ختم شوند؟

ب)حروف کلمه « گردی» اخر کلمه آمده باشند؟

الف) در اینجا چهار تا از انتخاب های ما مشخص شده اند این چهارحرف یک جایگشت دارند چون گفته کلمه به « گردی» ختم شود یعنی حق جابجایی حروف را نداریم، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمه « جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد $\binom{۴}{۲}$ و جایگشت این دو حرف برابر است با!۲ حال طبق اصل ضرب داریم: $\binom{۴}{۲} \times ۲! = ۱۲$

ب) در اینجا چهار تا از انتخاب های ما مشخص شده اند این چهارحرف !۴ جایگشت دارند چون گفته به حروف کلمه ی « گردی» ختم شود یعنی حق جابجایی حروف را داریم، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمه « جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد $\binom{۴}{۲}$ و جایگشت این دو حرف برابر است با!۲ حال طبق اصل ضرب داریم: $۴! \times \binom{۴}{۲} \times ۲! = ۲۸۸$

مثال: با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ»و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

در اینجا دو تا از انتخاب های ما مشخص شده اند«پ»و «ر» این دوحرف را یک شی در نظر می گیریم چون قرار است کنار هم باشند ، با توجه به اینکه دو حرف از چهار حرف مشخص اند؛ لذا فقط دو حرف دیگررا از بین حروف «گ» و «ل» و «ی» و «ا» باید انتخاب کنیم که برابر است با $\binom{۴}{۲}$ و جایگشت این سه شی («پ»و «ر» یک شی و انتخاب دو حرف از بین حروف «گ» و «ل» و «ی» و «ا» جمعا سه شی می شوند.) برابر است با!۳ همچنین جایگشت حروف«پ»و «ر» برابر!۲ حال طبق اصل ضرب داریم: $\binom{۴}{۲} \times ۳! \times ۲! = ۷۲$

ب) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

در اینجا چهار تا از انتخاب های ما مشخص شده اند«پیرا» این چهارحرف را یک شی در نظر می گیریم چون کنار هم هستند ، با توجه به اینکه چهار حرف از پنج حرف مشخص اند؛ لذا فقط یک حرف دیگررا از بین حروف «گ» و «ل» باید انتخاب کنیم که برابر است با $\binom{۲}{۱}$ و جایگشت این دوشی(«پیرا» یک شی و انتخاب یک حرف از بین حروف «گ» و «ل» جمعا دو شی می شوند.) برابر است با!۲ همچنین جایگشت حروف«پیرا» برابر!٤ حال طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{۲}{۱} \times ۲! \times ۴! = ۹۶$$